



BACHELOR THESIS



METHODEN VOOR HET SCHATTEN VAN OPTIEWAARDEN



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM
INFORMATICA & ECONOMIE

Door Steven Niggebrugge (265130)
onder begeleiding van dr. ir. J. van den Berg



Samenvatting

Dit onderzoek vergelijkt een aantal modellen om call optiewaarden mee te schatten. Het eerste model is één van de meest gebruikte modellen in de praktijk, het Black-Scholes model. Als alternatief voor dit model wordt er gebruik gemaakt van een neurale netwerk. Dit is een model dat na het toepassen van een leeralgoritme in staat is om continue numerieke waarden als output (de optieprijs) te genereren. De twee modellen zullen dezelfde informatie als input krijgen. Hiermee worden de vijf vereiste inputwaarden van het Black-Scholes model bedoeld: de aandeelkoers (S), de uitoefenprijs (K), de risicovrije rente (r), de resterende looptijd (T) en de volatiliteit van het aandeelrendement (σ).

Naast een model voor het schatten van de call optiewaarde, is er ook een model nodig dat de volatiliteit van het aandeelrendement schat. Dit is immers de enige variabele in het Black-Scholes model die niet direct waarneembaar en dus onbekend is. Het eerste model dat de waarde van deze variabele kan schatten is het GARCH(1, 1) model (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity). Als alternatief wordt de zogenaamde implicit volatility van de vorige dag gebruikt.

Het doel van dit onderzoek is te onderzoeken welke combinatie van modellen (model om optiewaarde mee te schatten in combinatie met model om volatiliteit te schatten) de nauwkeurigste schattingen van call optieprijs oplevert.

Het is gebleken dat het Black-Scholes model in combinatie met de implicit volatility ($t-1$) de nauwkeurigste schattingen van call optieprijs oplevert en dat deze significant beter zijn dan de schattingen van de overige drie combinaties van modellen (significantieniveau $\alpha = 0.05$).



Inhoudsopgave

1. Introductie	3
1.1 <i>Introductie</i>	3
1.2 <i>Probleemstelling</i>	4
1.3 <i>Doelstelling</i>	4
1.4 <i>Structuur van bachelor thesis</i>	5
2. Methodologie	6
2.1 <i>Black-Scholes model</i>	6
2.2 <i>GARCH(1,1)</i>	7
2.3 <i>Neuraal netwerk</i>	8
2.4 <i>Implicit volatility</i>	10
3. Experimentele setup	11
3.1 <i>De dataset</i>	11
3.2 <i>Berekenen implicit volatility en GARCH(1,1) volatiliteit</i>	12
3.3 <i>Opdelen dataset</i>	14
3.4 <i>Genereren neurale netwerken</i>	14
3.5 <i>Testen van combinaties van modellen</i>	15
4. Resultaten	17
4.1 <i>De neurale netwerken</i>	17
4.2 <i>Resultaten op de testset</i>	18
5. Conclusies	21
6. Verder onderzoek	24
7. Referenties	25
8. Bijlagen	26
<i>Bijlage 1: meer informatie over de dataset.....</i>	26
<i>Bijlage 2: meer informatie over de neurale netwerken</i>	27
<i>Bijlage 3: meer informatie over de prestaties op de testset</i>	31

Hoofdstuk 1

Introductie

1.1 Introductie

"Black-Scholes is an attempt to measure the market value of options and it cranks in certain variables, but the most important value it cranks in is the past volatility of the asset involved and past volatilities aren't the best judge of value." [12]

-Warren Buffett, Chairman of Berkshire Hathaway, Financial Times, May 4, 2003.

"The Nobel Prize winning Black-Scholes model does an excellent job of predicting the prices at which short-term options trade in the market. But the Black-Scholes formula does not provide reliable estimates for longer-term options, such as those lasting six months to one year, and market prices often differ substantially from predicted values." [12]

-Burton G. Malkiel, Professor of Economics, Princeton University, and William J. Baumol, Professor of Economics, New York University, "Stock Options Keep the Economy Afloat," The Wall Street Journal, April 4, 2002.

Het Black-Scholes model vindt zijn oorsprong in 1973 en is nog altijd één van de meest gebruikte modellen om optiewaarden te bepalen.

Echter, zoals hierboven in het citaat te lezen valt, heeft het Black-Scholes model volgens de experts ook zijn beperkingen en wordt er nog altijd gezocht naar betere modellen die nauwkeurigere schattingen van optiewaarden genereren.

Dat dit betreffende model 31 jaar na introductie nog altijd het bekendste optiewaarderingsmodel is en als standaard geldt bij het afleiden van optiewaarden, impliceert dat er nog altijd geen model is uitgevonden die opties nauwkeuriger weet te waarderen dan het Black-Scholes model.

Volgens het Black-Scholes model zijn er vijf parameters van invloed op de prijs van een optie:

- Koers van het onderliggende aandeel (S)
- Uitoefenprijs (K)
- Resterende looptijd (T)
- Risicovrije rente (r)
- Volatiliteit van het aandeelrendement (s)

De eerste vier parameters zijn direct waarneembaar en hun waarden zijn gemakkelijk te bepalen. De volatiliteit van het aandeelrendement daarentegen is niet direct

waarneembaar en er is geen standaardmethode om deze te bepalen. Er zijn echter wel degelijk een aantal modellen/methoden ontwikkeld om de volatiliteit te schatten. Om enkele voorbeelden te noemen: de historische volatiliteit, de implicit volatility, het EWMA-model, het ARCH-model en een variant op de laatste, het GARCH(x,y)-model.

1.2 Probleemstelling

Naast het Black-Scholes model bestaan er ook andere modellen om de waarde van een optie af te leiden. Voorbeelden hiervan zijn het binomiale model ([1], hoofdstuk 10) en het neurale netwerk.

Aangezien het Black-Scholes model als standaard aangemerkt kan worden, is het interessant om te onderzoeken of dit model verslagen kan worden door één van de andere modellen. Daarnaast zal er een ondersteunend model gebruikt moeten worden om de volatiliteit van het aandeelrendement te bepalen. Ook de keuze van dit model kan invloed hebben op de nauwkeurigheid van de schattingen van de optiewaarden.

1.3 Doelstelling

Er is voor gekozen om het Black-Scholes model af te zetten tegen één ander model, namelijk het neurale netwerk.

Bovendien zijn er twee modellen/methoden geselecteerd om de volatiliteit van het aandeelrendement te kunnen schatten, namelijk een GARCH(1,1) model en de implicit volatility ($t-1$). Alle gebruikte modellen en methoden zullen nader uitgelegd worden in hoofdstuk 2 (*Methodologie*).

Het doel van dit onderzoek is te onderzoeken welke combinatie van modellen (model om de optiewaarde mee te schatten in combinatie met een model om de volatiliteit te schatten) de nauwkeurigste schattingen van call optieprijs oplevert.

Hierbij wordt de beste combinatie gekozen uit een beperkte verzameling van de zojuist besproken modellen en is het dus niet de bedoeling de beste combinatie te vinden uit alle mogelijke modellen.

Het idee hierachter is om te onderzoeken of het beroemde Black-Scholes model verslagen kan worden. Als concurrent wordt het neurale netwerk naar voren geschoven.

Het grote voordeel van een neurale netwerk ten opzichte van het Black-Scholes model is de flexibiliteit. Door te variëren met het aantal verborgen lagen en het aantal cellen dat deze lagen hebben, zijn er vele verschillende neurale netwerken samen te stellen. Doordat de cellen in het neurale netwerk zowel lineaire als niet-lineaire operaties uitvoeren op hun ingangssignalen (zie paragraaf 2.3), is het in staat zichzelf ieder type functie (zowel lineair als niet-lineair) aan te leren. Hierdoor heeft een neurale netwerk veel potentie om gebruikt te worden voor regressieproblemen zoals het schatten van een optieprijs op basis van enkele gerelateerde variabelen zoals de uitoefenprijs en de aandeelkoers.

1.4 Structuur van bachelor thesis

De gebruikte modellen en methoden in dit onderzoek zullen worden besproken in hoofdstuk 2 (*Methodologie*).

Vervolgens zal in hoofdstuk 3 (*Experimentele set-up*) uitgebreid worden ingegaan op hoe het onderzoek is opgezet en hoe de methoden en formules zijn toegepast.

In hoofdstuk 4 (*Resultaten*) zullen de resultaten van het onderzoek gerapporteerd worden.

Hoofdstuk 5 (*Conclusies*) verbindt aan deze resultaten vervolgens de conclusies en zal antwoord geven op de zojuist besproken onderzoeksvragen.

Als laatste zullen er enkele suggesties voor verder onderzoek gepresenteerd worden in hoofdstuk 6 (*Verder onderzoek*).

Hoofdstuk 7 (*Referenties*) en 8 (*Bijlagen*) bevatten enkele referenties en bijlagen.

Hoofdstuk 2

Methodologie

2.1 Black-Scholes model

In 1973 introduceerden Fischer Black en Myron Scholes in de *Journal of Political Economy* een model waarmee (call/put) opties gewaardeerd kunnen worden [2]. Het model zou in de loop der tijd uitgroeien tot het meest gebruikte optiewaarderingsmodel. De invloed die dit model heeft gehad op de financiële wereld werd in 1997 nog maar eens onderstreept toen Black en Scholes de Nobelprijs voor de economie in ontvangst mochten nemen.

Het originele Black-Scholes model, zoals in 1973 gepresenteerd, ziet er als volgt uit ([1], hoofdstuk 12):

$$(1) \quad c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$(2) \quad p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

$$(3) \quad d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + s^2 / 2)T}{s\sqrt{T}}$$

$$(4) \quad d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - s^2 / 2)T}{s\sqrt{T}}$$

Symbolen:

c = prijs van call optie
 p = prijs van put optie
 S_0 = prijs van onderliggend aandeel op tijdstip $t = 0$
 K = uitoefenprijs
 r = risicovrije rente
 T = resterende looptijd in dagen
 s = volatiliteit van het aandeelrendement op jaarbasis

Het model kent de volgende veronderstellingen ([1], hoofdstuk 12):

- I. De risicovrije rente r is gegeven en is constant gedurende de looptijd van de optie.
- II. De koers van het onderliggende aandeel S volgt een zogenaamde random walk (Markov proces) ([1], hoofdstuk 11). Dit impliceert dat de markt efficiënt is en dat alle relevante informatie in de koers van het aandeel verwerkt is. Hierdoor kunnen beleggers aan de hand van bijvoorbeeld historische informatie geen kennis verwerven over de toekomstige ontwikkelingen van de aandeelkoers.
- III. Er wordt geen dividend uitgekeerd op het aandeel gedurende de looptijd van de optie.
- IV. De markt kent geen transactiekosten en belastingen.
- V. Short gaan is toegestaan, hiermee zijn ook geen extra kosten gemoeid.
- VI. Er bestaan geen risicoloze arbitragemogelijkheden.

- VII. Het handelen in beleggingsobjecten is een continu proces en daarmee ook het prijsvormingsproces van de beleggingsobjecten.
- VIII. Het Black-Scholes model prijst Europese opties. Echter aangezien er vanuit wordt gegaan dat er geen dividend wordt uitgekeerd, is het nooit verstandig een call optie vroegtijdig uit te oefenen ([1], hoofdstuk 8, p. 177-178). Door de afwezigheid van dividend is de waarde van een Europese optie gelijk aan die van een Amerikaanse optie.

Er zijn varianten ontwikkeld op het Black-Scholes model waarbij een aantal van de voorgaande veronderstellingen niet gelden. Een voorbeeld hiervan is het Black-Scholes model dat wel overweg kan met dividenden en Amerikaanse opties ([1], hoofdstuk 12, p. 252-256).

Voor dit onderzoek is ervoor gekozen gebruik te maken van het originele Black-Scholes model vanwege het gebruiksgemak en omdat het originele Black-Scholes model wereldwijd nog altijd het bekendste optiewaarderingsmodel is.

2.2 GARCH (1,1)

Met behulp van de bekende variabelen uit het Black-Scholes model moet de prijs van een call optie zo nauwkeurig mogelijk benaderd worden. Vier van de vijf variabelen zijn gemakkelijk af te leiden uit empirische data. De vijfde, de volatiliteit van het aandeelrendement, is niet direct waarneembaar en er bestaat geen standaardmethode om deze te bepalen. In de loop der tijd zijn er echter wel degelijk methoden ontwikkeld om de volatiliteit te schatten.

Robert F. Engle introduceerde het *AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* model (ARCH model) in 1982 in een artikel in *Econometrica* [3].

Hiervoor zou hij in 2003, samen met Clive Granger, de Nobelprijs voor de economie ontvangen.

Een variant op het ARCH model, het *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* model (GARCH model), werd in 1986 door T. Bollerslev geïntroduceerd in een artikel in de *Journal of Econometrics* [4].

In financiële markten is de volatiliteit een belangrijk begrip en is het van grote invloed op de prijsvorming van o.a. derivaten. De volatiliteit geeft een indicatie van de sterkte van fluctuaties van, in dit geval, het aandeelrendement.

Engle constateerde dat deze volatiliteit in de loop der tijd kan fluctueren en ontwikkelde het ARCH model waarmee het patroon van de variërende volatiliteit herkend kon worden.

Voor dit onderzoek wordt er gebruik gemaakt van het GARCH(x,y) model, omdat dit tegenwoordig het meest gebruikte model is bij het analyseren van tijdreeksen in de financiële wereld.

De te schatten dagvolatiliteiten (de uitkomsten van een GARCH(x,y) model zijn volatiliteiten op dagbasis) worden berekend op basis van drie variabelen ([1], hoofdstuk 17):

- Een lange termijns variantie V_L , de variantie waar de geschatte gekwadraterde dagvolatiliteit s^2 in de loop der tijd zal naar toe zal convergeren (mean reversion).
- De x recentste gekwadraterde rendementen (u^2) op het aandeel.
- De y recentste geschatte dagvolatiliteiten (s^2) met het GARCH(x,y) model.

Van alle GARCH(x,y) modellen is GARCH(1,1) het populairst. Dit model ziet er als volgt uit ([1], hoofdstuk 17):

$$(5) \quad s_n^2 = gV_L + au_{n-1}^2 + bs_{n-1}^2$$

Dit model wordt meestal herschreven tot:

$$(6) \quad s_n^2 = w + au_{n-1}^2 + bs_{n-1}^2$$

waarbij $w = gV_L$

De volgende restricties gelden:

$$(7) \quad g + a + b = 1$$

$$(8) \quad a + b < 1$$

Symbolen:

s_n^2 = de geschatte gekwadrateerde dagvolatiliteit op tijdstip $t = n$
 V_L = de lange termijns variantie
 u_{n-1}^2 = het gekwadrateerde rendement op het onderliggende aandeel op tijdstip $t = n - 1$
 g, a, b = gewichten die toegekend zijn aan de voorgaande parameters. Deze worden geschat m.b.v. een maximum likelihood methode.

De optimale waarden voor de gewichten g, a en b worden geschat met behulp van een maximum likelihood methode. Deze methode kiest de waarden voor de parameters die ervoor zorgen dat de zogenaamde maximum likelihood functie wordt gemaximaliseerd. De te gebruiken maximum likelihood functie luidt als volgt ([1], hoofdstuk 17, p.378-380):

$$(9) \quad \sum_{i=1}^m \left(-\ln(s_i^2) - \frac{u_i^2}{s_i^2} \right)$$

Hierbij wordt gesommeerd over een m aantal data-instanties, in dit geval over een m aantal dagrendementen op het onderliggende aandeel.

Met het gevonden GARCH(1,1) model is het ook mogelijk om de volatiliteit vooruit te voorspellen en een idee te krijgen van de toekomstige ontwikkelingen van de volatiliteit. Zoals al eerder genoemd zal de volatiliteit hierbij convergeren naar de lange termijns variantie V_L , een proces dat mean reversion wordt genoemd. De volgende formule is in staat om toekomstige dagvolatiliteiten te schatten ([1], hoofdstuk 17, p.382-384):

$$(10) \quad E(s_{n+k}^2) = V_L + (a + b)^k (s_n^2 - V_L)$$

2.3 Neuraal netwerk

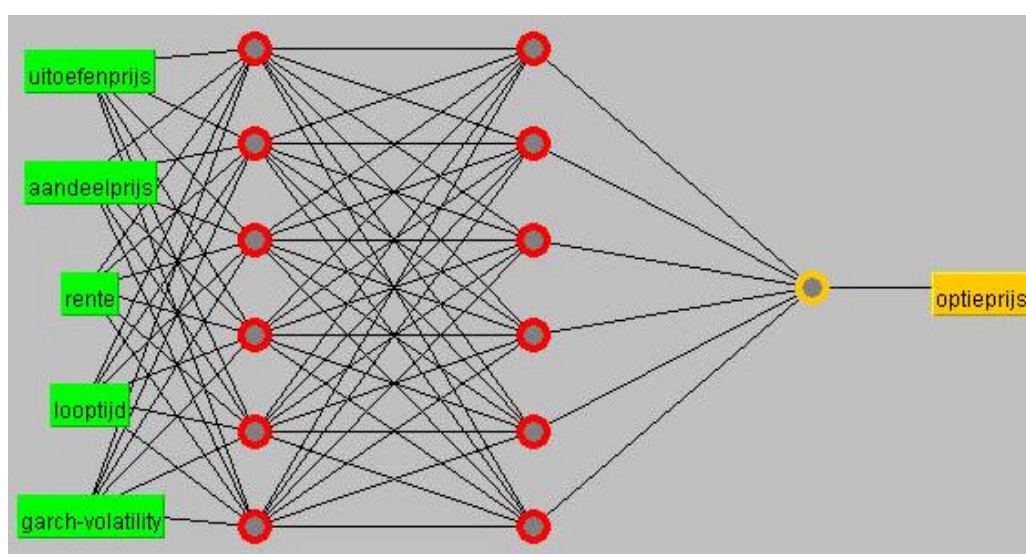
Een (artificieel) neuraal netwerk is een informatieverwerkend systeem dat gebaseerd is op de werking van het menselijk brein. Het bestaat uit een verzameling van eenvoudige rekenelementjes, neuronen genaamd. Doordat de neuronen met elkaar in verbinding staan kunnen ze gegevens met elkaar uitwisselen. In een artificieel neuraal netwerk worden deze neuronen vaak cellen genoemd.

Een artificieel neurale netwerk ¹ kent een aantal input- en outputcellen, waarmee het kan communiceren met zijn omgeving. De sterktes van de verbindingen oftewel de gewichten reguleren de gegevensuitwisseling in het neurale netwerk. Op deze manier bepalen de gewichten uiteindelijk hoe het neurale netwerk functioneert.

De kracht van een neurale netwerk is dat het kan leren aan de hand van een verzameling voorbeelden (trainingsset) die het neurale netwerk aangereikt krijgt. Het past de gewichten van de verbindingen stap voor stap aan volgens een bepaalde leerregel aan de hand van de trainingsset [8].

Het belangrijkste aspect van een neurale netwerk is dat het na de leerfase in staat is om te generaliseren [9]. Nadat het neurale netwerk zichzelf een functie aan de hand van de trainingsset heeft aangeleerd, kan het deze functie toepassen op een testset die bestaat uit voorbeelden die niet in de trainingsset aanwezig waren.

Figuur 1 laat een illustratie van een neurale netwerk zien:



Figuur 1) Een neurale netwerk met vijf inputcellen (inputlaag), twee verborgen lagen met ieder zes verborgen cellen en één outputcel (outputlaag).

Het ingangssignaal van een cel bestaat uit een gewogen lineaire sommatie van de uitgangssignalen van andere cellen waarmee de cel verbonden is.

Doordat een neurale netwerk zelf samen te stellen is (aantal inputcellen, verborgen cellen, outputcellen en verbindingen) is het mogelijk ieder type lineaire functie te creëren. Als er in het netwerk nu ook sigmoïde cellen verwerkt worden, is het mogelijk ook niet-lineaire functies na te bootsen. Sigmoïde cellen zijn cellen die op hun ingangssignaal een niet-lineaire functie loslaten ([5], hoofdstuk 4, p. 95-97).

Omdat neurale netwerken ieder type functie kunnen nabootsen en de input- en outputwaarden continue numerieke waarden kunnen zijn, heeft het veel potentie om gebruikt te worden voor regressieproblemen. Voor dit doeleinde zal het neurale netwerk ook gebruikt gaan worden later in dit onderzoek.

Het bekendste algoritme om het neurale netwerk mee te trainen is het backpropagation algoritme ([5], hoofdstuk 4, p. 97-101).

¹ In de rest van dit verslag zal met de term 'neurale netwerk' een 'artificieel neurale netwerk' bedoeld worden.

Het backpropagation algoritme kent een aantal parameters die van grote invloed kunnen zijn op de uiteindelijke prestaties van het neurale netwerk. Deze parameters zijn:

- *Learning rate*: is een maatstaf voor de grootte van de veranderingen die de gewichten ondergaan tijdens de trainingsfase. Bij een kleine learning rate zullen de gewichten tijdens de training heel geleidelijk verschuiven naar een zo optimaal mogelijke waarde.
- *Momentum*: deze parameter zorgt er voornamelijk voor dat de waarden van de gewichten niet zo snel blijven steken in lokale minima. Als de prestaties van het neurale netwerk niet lijken te verbeteren tijdens de trainingsfase zorgt het momentum ervoor dat de gewichten toch licht aangepast zullen worden in de hoop dat de prestaties van het neurale netwerk later zullen verbeteren.
- *Aantal epochs*: geeft aan hoe vaak de trainingsset zal worden gebruikt tijdens de trainingsfase indien er geen early stopping plaatsvindt (maximaal aantal iteraties van de trainingsset).

Tijdens de trainingsfase kan er ook gebruik gemaakt worden van een validatieset. Als tijdens de trainingsfase de prestaties op de validatieset verslechteren, zal er early stopping plaatsvinden. Dat houdt in dat de training van het neurale netwerk vervroegd gestopt wordt en het neurale netwerk dat tot die tijd tot stand was gekomen als eindresultaat van de training zal gelden.

Early stopping zal er voornamelijk voor zorgen dat er geen overfitting optreedt.

Overfitting houdt in dat de prestaties van het neurale netwerk op de trainingsset verbeteren, terwijl de prestaties op ongeziene voorbeelden (bijvoorbeeld de testset) juist verslechteren. Het generalisatievermogen van het neurale netwerk verslechtert in dit geval.

2.4 Implicit volatility

Naast de GARCH(1,1) volatiliteit is ook de implicit volatility een goede maatstaf voor de volatiliteit die ten grondslag ligt aan de prijsvorming van derivaten, zoals een call optie.

De implicit volatility ([1], hoofdstuk 12, p. 250-251) is de volatiliteit die door de optieprijs op de markt geïmpliceerd wordt [1]. Dit is dan in feite de volatiliteit die beleggers hanteren bij het bepalen van de optiepremies. De implicit volatility weerspiegelt de toekomstige fluctuaties van het aandeelrendement gedurende de rest van de looptijd van de optie.

Indien de optiepremie bekend is, kan de implicit volatility via het Black-Scholes model (formules 1, 2, 3 en 4) direct afgeleid worden.

De volatiliteit is in dit geval namelijk de enige onbekende variabele in het Black-Scholes model.

Hoofdstuk 3

Experimentele set-up

In de volgende paragrafen zal de opzet van het onderzoek besproken worden.

3.1 De dataset

Eerst moest er een dataset met historische optiegegevens verkregen worden. Deze gegevens zijn verkregen via Datastream [13]. In de dataset zaten miljoenen daggegevens van duizenden verschillende opties die looptijden hadden in de periode 1995 t/m 2003.

Vervolgens moesten er uit deze gigantische dataset bepaalde call opties gefilterd worden. De verzameling daggegevens waarmee gewerkt zou worden moest aan de volgende kenmerken voldoen:

- Van iedere optie moesten de daggegevens van een bepaalde dag tot en met het einde van de looptijd verzameld worden. Aangezien het Black-Scholes model bij opties met lange looptijden onnauwkeurige schattingen (vanwege een fluctuerende rente en volatiliteit) genereert, zijn er voornamelijk opties uitgekozen met een looptijd korter dan 150 dagen. In bijlage 1 is de frequentieverdeling te zien van de looptijden. Er valt bijvoorbeeld af te lezen dat er tussen de gebruikte daggegevens ongeveer 120 dagrecords zaten met gegevens over een optie die nog een resterende looptijd van 70-80 dagen had.
- In de dataset moesten van de dagrecords de relevante attributen worden uitgefilterd om deze te gebruiken in het vervolg van het onderzoek: de optiepremie, de dagkoers van het onderliggende aandeel, de expiratedatum, de huidige datum en de uitoefenprijs van de optie.
- Als risicovrije rente (r in het Black-Scholes model) werd de kapitaalmarktrentevoet op staatsobligaties gebruikt. Deze rente ligt in tussen de kapitaalmarktrentevoet op kortlopende staatsobligaties (3-5 jaar) en middellanglopende staatsobligaties (5-8 jaar). De rentegegevens werden verkregen via De Nederlandsche Bank [7].
- Om een neurale netwerk zo goed mogelijk te trainen is het verstandig om per inputattribuut (bijv. de optiepremie) de waarden ervan in een zo groot mogelijk interval te laten vallen.

Als er in de trainingsfase van het neurale netwerk alleen maar daggegevens gebruikt worden met een optiepremie die ligt in het interval € [1.50, 2.00], dan is de kans klein dat het netwerk een nauwkeurige schatting genereert bij een ongezien voorbeeld met een optiepremie van € 7.00.

Daarom vielen de looptijden van de opties in de gebruikte dataset ook in zoveel mogelijk verschillende jaren (omdat de rentegegevens slechts vanaf 2000

beschikbaar waren, vielen de looptijden in de jaren 2000-2003). Op deze manier werd er bijvoorbeeld voor gezorgd dat de rente in de dataset relatief veel fluctueert.

Voor meer informatie over de gebruikte dataset, zie bijlage 1.

3.2 Berekenen implicit volatility en GARCH(1,1) volatiliteit

Bij elke record in de dataset (gegevens over een optie op één bepaalde dag) waren de volgende attributen nu opgezocht: de optiepremie, de huidige aandeelkoers, de huidige datum, de expiratedatum en de risicovrije rente.

Voor de overige attributen resterende looptijd, implicit volatility en de GARCH(1,1) volatiliteit moesten er berekeningen worden uitgevoerd.

De resterende looptijden (in dagen) waren gemakkelijk te berekenen aan de hand van de huidige datum en de expiratedatum.

Met behulp van een speciale Excel add-in (OPTIONS XL) [10] konden ook per dag de implicit volatilities berekend worden. Op dag X werd als implicit volatility de implicit volatility van dag $X-1$ gebruikt. Dit vanwege de simpele reden dat de prijs van de call optie op dag X nog niet bekend was (dit is namelijk de prijs die bepaald dient te worden!), hierdoor is ook de implicit volatility van dag X niet te berekenen.

De add-in berekende deze volatilititeiten op basis van de bekende optiepremie en het originele Black-Scholes model, gepresenteerd zoals in paragraaf 2.1.

Nu dienden de GARCH(1,1)-dagvolatilititeiten berekend te worden. De gebruikte werkwijze was als volgt:

- Bij alle vijftien gebruikte opties waren er gemiddeld 100 daggegevens bekend. Dit houdt in dat alle gegevens bekend waren over de optie van het moment dat de optie nog (gemiddeld) 100 handelsdagen te gaan had tot het moment dat de expiratedatum bereikt werd. De eerste 30 handelsdagen (dagen 1 t/m 30) werden gebruikt om de initiële optimale waarden van de GARCH(1,1) variabelen a , β en γ te schatten (zie formule 6). Hiervoor werd de maximum likelihood methode gebruikt (zie paragraaf 2.2). De Excel Solver [14] werd vervolgens aangeroepen om de optimale waarden van de beslissingsvariabelen a , β en γ te bepalen. Dit zijn de waarden die ervoor zorgden dat de maximum likelihood functie (zie formule 9) gemaximaliseerd werd.
- De optimale waarden voor a , β en γ waren bepaald aan de hand van de handelsdagen 1 t/m 30. Als nu bijvoorbeeld de dagvolatiliteit van handelsdag 60 bepaald dient te worden, dan is het verstandiger om de optimale waarden van a , β en γ opnieuw te berekenen aan de hand van de dagen 30 t/m 59. Deze 30 handelsdagen bevatten namelijk meer verklarende kracht ten aanzien van de volatiliteit op handelsdag 60, dan de handelsdagen 1 t/m 30. Hierbij wordt de logische aanname gebruikt dat de recentste handelsdagen de meeste informatie bevatten ten aanzien van de koersontwikkelingen van vandaag. Als deze aanname gemaakt wordt dan dienden bij het bepalen van iedere dagvolatiliteit allereerst de optimale waarden van a , β en γ opnieuw berekend te worden op basis van de 30 handelsdagen daarvoor. Aangezien het verversen van de optimale waarden van a , β en γ in Excel met behulp van de Excel solver handmatig gedaan moet worden, is er voor

gekozen om de optimale waarden van a , β en σ om de 10 handelsdagen te verversen. Het bepalen van deze optimale waarden van a , β en σ gebeurde telkens op basis van 30 handelsdagen.

- Het bepalen van de dagvolatiliteiten gebeurde nu als volgt. Nadat de initiële optimale waarden van a , β en σ berekend waren op basis van handelsdagen 1 t/m 30, werden de dagvolatiliteiten van de dagen 31 t/m 40 berekend aan de hand van formule 6 waar de gevonden waarden van a , β en σ zijn ingevuld. Hierna werden de waarden van a , β en σ geoptimaliseerd op basis van de handelsdagen 11 t/m 40. Met behulp van de gevonden waarden konden de dagvolatiliteiten van de dagen 41 t/m 50 vervolgens berekend worden. Dit proces van verversen van de waarden van a , β en σ op basis van handelsdagen X t/m $X+29$ (= 30 handelsdagen), om deze vervolgens te gebruiken voor het bepalen van de dagvolatiliteiten van handelsdagen $X+30$ t/m $X+39$ werd herhaald totdat de expiratiedatum bereikt werd.
- Op deze manier konden voor alle handelsdagen bij elke optie de dagvolatiliteiten berekend worden. Deze berekende volatiliteiten zijn echter dagvolatiliteiten en bevatten geen informatie over de te verwachten volatiliteit in de toekomst. Bij het bepalen van een prijs voor een optie moet er echter een volatiliteit gebruikt worden die de volatiliteit weerspiegelt van de periode die ligt tussen nu en het einde van de looptijd van de optie (net als bij het Black-Scholes model).

Om deze te kunnen berekenen moeten er dagvolatiliteiten vooruit voorspeld worden. Als bijvoorbeeld de prijs van een optie op handelsdag 10 geschat moet worden, dan dienen naast de dagvolatiliteit (s_n in het GARCH(1,1) model) van handelsdag 10 ook de dagvolatiliteiten van de handelsdagen 11 t/m de expiratiedatum berekend te worden. Hiervoor werd formule 10 gebruikt. Vervolgens werd s_n^2 bepaald door het gemiddelde te nemen van de (gekwadrateerde) dagvolatiliteit van handelsdag 10 en de voorspelde (gekwadrateerde) dagvolatiliteiten van handelsdagen 11 t/m de expiratiedatum. De uitkomst was een gemiddelde van (gekwadrateerde) dagvolatiliteiten. Net als bij het Black-Scholes model werd er een geannualiseerde volatiliteit vereist. Uitgaande van het feit dat een jaar 252 handelsdagen telt ([1], hoofdstuk 17, p. 384), werd de gekwadrateerde dagvolatiliteit s_n^2 vermenigvuldigd met 252:

$$(10) \quad s_n^2 = \left(\frac{1}{T-n+1} \sum_{t=n}^T s_t^2 \right) * 252$$

Hierbij is T het nummer van de handelsdag waarop de optie expireert.

Als nu de wortel getrokken werd uit het resultaat van formule 10, dan werd de gewenste volatiliteit s_n verkregen die de volatiliteit weerspiegelt van de periode tussen $t=n$ en $t=T$.

- Door het voorgaande beschreven proces toe te passen op iedere dag in de dataset, kon voor iedere dag een volatiliteit bepaald worden die de volatiliteit weerspiegelt van de resterende looptijd van de optie.

Let wel: de initiële optimale waarden van a , β en σ werden bepaald op basis van handelsdagen 1 t/m 30 van optie X. De daggegevens van deze handelsdagen 1 t/m 30 werden voor de rest van het onderzoek verwijderd uit de dataset. Het berekenen van de dagvolatiliteit van één van deze dagen was

namelijk niet mogelijk, omdat de optimale waarden van α , β en γ berekend werden op basis van 30 handelsdagen ervoor. Bijvoorbeeld bij het berekenen van de dagvolatiliteit van handelsdag 10 zouden geen 30 handelsdagen ervoor gevonden kunnen worden om de optimale waarden van de GARCH(1,1) variabelen te berekenen.

3.3. Opdelen dataset

Alle benodigde gegevens waren nu berekend en in de dataset geplaatst. De complete dataset moest nu (eenmalig) verdeeld worden in een aantal stukken: de trainings-, validatie- en de testset.

De trainingsset zou gebruikt worden om de neurale netwerken te genereren. De validatieset was nodig om tijdens de trainingsfase van het neurale netwerk early stopping mogelijk te maken (zie paragraaf 2.3).

De testset zou tenslotte moeten uitmaken welke combinatie van modellen de nauwkeurigste schattingen opleverde.

De verhouding trainingsset/validatieset/testset werd vastgesteld op 60/15/25%.

Na aftrek van de nodige datarecords (zie bijvoorbeeld paragraaf 3.2) bleven er 1018 datarecords over.

De verschillende sets bestonden dus uit het volgende aantal datarecords:

- Trainingsset: $0.6 * 1018 = 610$ records
- Validatieset: $0.15 * 1018 = 152$ records
- Testset: $0.25 * 1018 = 256$ records

3.4 Genereren neurale netwerken

Vervolgens was het tijd om de neurale netwerken te creëren. Dit is gedaan met het bekende WEKA softwarepakket [11].

Met dit pakket moesten twee neurale netwerken geproduceerd worden.

Het eerste neurale netwerk moest schattingen van optieprijs produceren aan de hand van o.a. de implicit volatility ($t-1$), de tweede moest schattingen produceren aan de hand van de GARCH(1,1) volatilititeiten.

Bij het trainen van de neurale netwerken moest er op een aantal zaken gelet worden die uiteindelijk van grote invloed kon zijn op de nauwkeurigheid van de schattingen die het neurale netwerk zou doen:

- Ten eerste was de gekozen structuur van het neurale netwerk belangrijk. Evenals het aantal inputcellen (5: koers onderliggend aandeel, risicovrije rente, resterende looptijd, volatiliteit aandeelrendement en de uitoefenprijs) waren ook het aantal outputcellen (1: de optieprijs) bekend. Het aantal verborgen lagen en het aantal cellen waaruit deze lagen bestonden konden daarentegen door de gebruiker van het neurale netwerk gekozen worden. Er was voor gekozen om tijdens de trainingsfase te experimenteren met 1 en 2 verborgen lagen, die elk niet meer dan uit 6 cellen zouden bestaan.

- Ook waren de waarden van de parameters van het backpropagation algoritme belangrijk. Dit waren de learning rate, het momentum en het aantal epochs (zie ook paragraaf 2.3).

Er was voor gekozen om het domein van de variabele learning rate vast te stellen op [0.05, 0.4].

Voor de variabele momentum was dit gedaan op [0, 0.3] en het aantal epochs werd vastgesteld op 5000 (anders zou de trainingstijd wel erg lang worden bij ieder te trainen neurale netwerk).

Aangezien er gebruik is gemaakt van early stopping, zou de training van het neurale netwerk na een minder aantal epochs dan deze 5000 kunnen stoppen. Early stopping zou toegepast worden indien de prestaties op de validatieset 20 maal (de zogenaamde validation threshold) op rij zouden verslechteren. Hierbij werd het neurale netwerk getest op de validatieset na iedere invoering van een trainingsvoorbeeld.

Door telkens nieuwe waarden te kiezen voor de parameters structuur, learning rate en momentum zijn er vele combinaties van deze waarden te creëren. Op deze manier zijn er tientallen verschillende neurale netwerken gecreëerd.

Als het best presterende netwerk onder de onderzochte netwerken was gevonden, dan werd dit netwerk nogmaals gecreëerd. Het enige verschil zou zijn dat de variabele aantal epochs werd verhoogd naar 30000. Dit is gedaan om te kijken of het best presterende netwerk (met 5000 epochs) in staat was om nog nauwkeurigere schattingen te produceren als het meer tijd kreeg om zichzelf te trainen.

3.5 Testen van combinaties van modellen

Nadat er twee neurale netwerken uitgekozen waren, konden de vier combinaties van modellen met elkaar vergeleken worden door de resultaten op de testset naast elkaar te leggen.

Vanwege het gemakkelijk implementeren van deze foutmaatstaf is als maatstaf voor de afwijkingen ten opzichte van de werkelijke optieprijs gekozen voor de Mean Absolute Error (MAE), die gedefinieerd kan worden als het gemiddelde van de absolute afwijkingen ten opzichte van het de werkelijke optieprijs:

$$(11) \quad MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |s_i - x_i|$$

waarbij n het aantal datarecords is, s_i de schatting van de optieprijs en x_i de werkelijke optieprijs voorstelt.

Om erachter te komen of de Mean Absolute Errors van de vier methoden ook daadwerkelijk significant van elkaar verschilden, moesten er enkele statistische toetsen worden uitgevoerd.

Toen de vier combinaties van modellen getest werden met behulp van de testset, waren er vier steekproeven van ieder 256 schattingen van optieprijs geproduceerd. Vervolgens was het mogelijk om te testen of de combinatie van modellen met de kleinste MAE, ook significant nauwkeurigere schattingen genereerde dan de overige drie combinaties van modellen. Dit werd gedaan met een eenzijdige t-toets waarbij getest werd of de MAE's van beide methoden aan elkaar gelijk waren (nulhypothese) of

dat de MAE van de methode met de kleinste MAE kleiner was dan de MAE van de tweede methode (alternatieve hypothese). Er werd gekozen voor een significantieniveau van 5%.

- (12) H_0 : MAE(methode 1) = MAE (methode 2) tegenover
 H_1 : MAE(methode 1) < MAE (methode 2)
 met een significantieniveau $\alpha = 0.05$ en waarbij de MAE van methode 1 kleiner is dan die van methode 2.

Er was hier sprake van een tweetal onafhankelijke steekproeven (beide steekproeven bestaan uit de absolute afwijkingen van de schattingen ten opzichte van de werkelijke optieprijzen).

De Centrale Limiet Stelling zegt dat aangenomen mag worden dat beide steekproeven (ieder 256 stuks) normaal verdeeld zijn indien de steekproeven voldoende groot zijn (gebruikte vuistregel in Aczel [6]: ≥ 30 stuks).

Vanwege het normaal verdeeld zijn van de beide steekproeven en het onbekend zijn van de populatiestandaarddeviaties s_1 en s_2 werd de zogenaamde t-toets ([6], hoofdstuk 8) gebruikt om te bepalen hoe groot de kans was dat beide MAE's aan elkaar gelijk waren:

$$(13) \quad t = \frac{MAE_2 - MAE_1}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

als $t < t_{0.05}(df)$, waarbij het aantal vrijheidsgraden

$$df = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2-1)}, \text{ dan kan de}$$

nulhypothese H_0 verworpen worden en is MAE_1 dus significant lager dan MAE_2 bij een significantieniveau α van 0.05.

s_1 en s_2 zijn de standaarddeviaties van de beide steekproeven (die bestaan uit de absolute afwijkingen van de schattingen t.o.v. de werkelijke optieprijzen). n_1 en n_2 zijn het aantal instanties waaruit beide steekproeven bestaan (256).

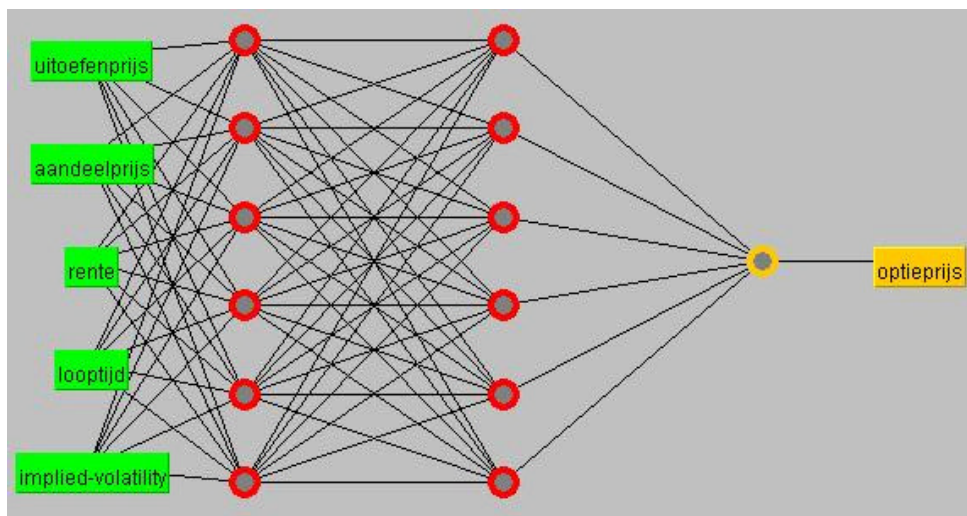
Hoofdstuk 4

Resultaten

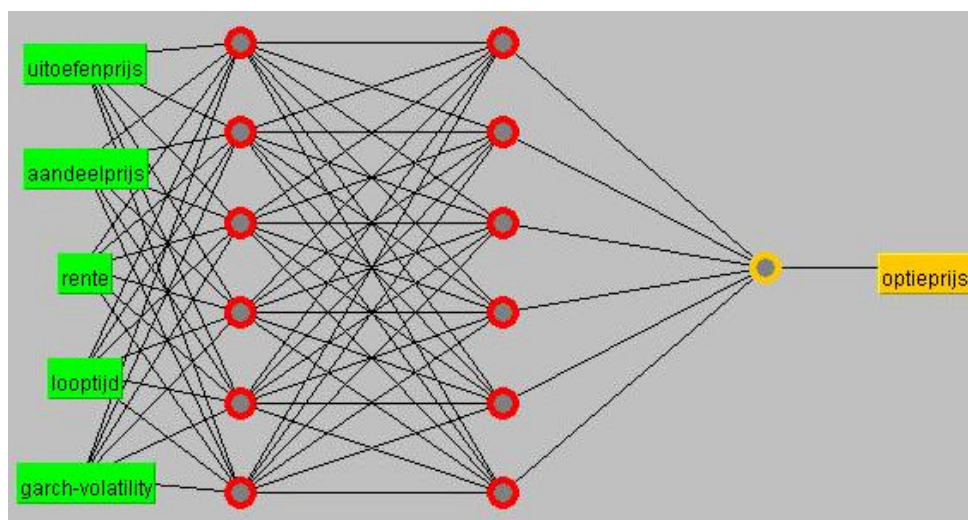
4.1 De neurale netwerken

Voordat er getest kon worden welke combinatie van modellen de beste schattingen op de testset zou produceren, moesten er eerst twee neurale netwerken gegenereerd worden. Het eerste neurale netwerk zou schattingen produceren op basis van o.a. de implicit volatility ($t-1$), de andere op basis van o.a. de GARCH(1,1) volatiliteit. Zoals al aangegeven in het hoofdstuk Experimentele set-up, zijn er vele tientallen neurale netwerken geproduceerd waarbij geëxperimenteerd werd met parameters zoals de learning rate en het momentum. Van al deze netwerken zijn vervolgens de best presterende uitgekozen.

De twee uitgekozen neurale netwerken worden geïllustreerd in figuur 2 en 3:



Figuur 2) Het neurale netwerk dat schattingen van optieprijsen produceert op basis van de volgende parameters: uitoefenprijs, aandeelprijs, risicovrije rente, resterende looptijd en de implicit volatility ($t-1$). Een structuur met twee verborgen lagen met ieder zes cellen bleek het best presterende neurale netwerk op te leveren.



Figuur 3) Het neurale netwerk dat schattingen van optieprijsen produceert op basis van de volgende parameters: uitoefenprijs, aandeelprijs, risicovrije rente, resterende looptijd en de GARCH(1,1) volatiliteit. Een structuur met twee verborgen lagen met ieder zes cellen bleek het best presterende neurale netwerk op te leveren.

De waarden van de parameters van het backpropagation algoritme (zie paragraaf 2.3) waren als in tabel 1 toen de twee uitgekozen netwerken gegenereerd werden:

	Neuraal netwerk 1 (figuur 2)	Neuraal netwerk 2 (figuur 3)
Learning rate	0.1	0.1
Momentum	0.3	0.3
Aantal epochs	30000	30000
Validation threshold	20	20

Tabel 1) De waarden van de backpropagation parameters van de twee best presterende neurale netwerken.

Meer details over de twee neurale netwerken zijn te vinden in bijlage 2, waar o.a. de gewichten van de verbindingen te bezichtigen zijn.

4.2 Resultaten op de testset

Voordat de resultaten op de testset gepresenteerd worden, worden de vier combinaties van modellen nogmaals op een rijtje gezet:

- Black-Scholes model in combinatie met de implicit volatility ($t-1$)
- Black-Scholes model in combinatie met GARCH(1,1)
- Neuraal netwerk in combinatie met de implicit volatility ($t-1$)
- Neuraal netwerk in combinatie met GARCH(1,1)

Deze vier combinaties zijn uitgevoerd op de testset van 256 datarecords. Vervolgens zijn per datarecord de absolute afwijkingen van de geschatte optieprijs ten opzichte van de werkelijke optieprijs berekend. De gemiddelden (MAE) en de standaarddeviaties S_{MAE} van deze absolute afwijkingen staan afgebeeld in tabel 2:

	Mean Absolute Error (MAE)	Standaarddeviatie s_{MAE}
B&S met implicit volatility($t-1$)	€0.110	0.154
B&S met GARCH($1, 1$)	€0.649	1.080
Neuraal netwerk met implicit volatility ($t-1$)	€0.161	0.177
Neuraal netwerk met GARCH($1, 1$)	€0.140	0.179

Tabel 2) De prestaties van de vier combinaties van modellen op de testset. De gebruikte foutmaatstaf is de MAE. Ook de standaarddeviatie (s_{MAE}) van de absolute afwijkingen is berekend. Met behulp van deze s_{MAE} kunnen enkele statistische toetsen worden uitgevoerd. Meer informatie over de resultaten op de testset staat in bijlage 3, waar o.a. de frequentieverdeling-grafieken (histogrammen) te vinden zijn.

Eén aspect viel bij het analyseren van de resultaten op de testset op. Hierbij werd de testset opgedeeld in twee nieuwe sets, waarbij de eerste set bestaat uit de daggegevens van opties met een resterende looptijd van 0 t/m 50 dagen en de tweede set uit daggegevens van opties met een resterende looptijd van meer dan 50 dagen. Hierna werd gekeken naar de prestaties van de vier combinaties van modellen op deze twee nieuwe sets (tabel 3):

	MAE testset 1 (0-50 dagen)	MAE testset 2 (>50 dagen)
B&S met implicit volatility($t-1$)	€ 0.087	€ 0.138
B&S met GARCH($1, 1$)	€ 0.222	€ 1.037
Neuraal netwerk met implicit volatility ($t-1$)	€ 0.147	€ 0.174
Neuraal netwerk met GARCH($1, 1$)	€ 0.116	€ 0.162

Tabel 3) De resultaten van de vier combinaties van modellen op de nieuwe twee afzonderlijke testsets.

Wat opviel was dat de twee MAE's van de combinatie B&S/GARCH($1, 1$) meer dan 80 eurocent van elkaar verschilden, terwijl het verschil bij de overige combinaties relatief klein was.

De combinatie Black-Scholes model met de implicit volatility ($t-1$) lijkt de nauwkeurigste schattingen van de optieprijs te genereren. Of de schattingen van deze combinatie ook daadwerkelijk significant beter zijn dan die van de overige methoden, zal moeten blijken uit de resultaten van de uitgevoerde t-toetsen (zie formules 12 en 13) die vermeld staan in tabel 4.

Er zal nog een korte toelichting gegeven worden bij de uitgevoerde t-toetsen in de rechterkolom.

De nulhypothese van de toets luidt dat de MAE van methode 1 (die een kleinere MAE heeft dan methode 2) gelijk is aan die van methode 2. De alternatieve hypothese luidt dan dat de MAE van methode 1 kleiner is dan die van methode 2. Het gebruikte significantieniveau α is 0.05.

De laatste drie regels in een cel van de rechterkolom geven de resultaten weer van de zojuist beschreven t-toets.

Als de t-waarde (zie formule 13) onder zijn zogenaamde kritieke waarde blijft (kritieke waarde is afhankelijk van het significantieniveau α en het aantal vrijheidsgraden df) dan zal de kans dat de nulhypothese waar is ($P(H_0)$) groter dan het significantieniveau α

(0.05) zijn. Hierdoor zal de nulhypothese geaccepteerd worden en is er niet bewezen dat de schattingen van methode 1 nauwkeuriger zijn dan die van methode 2. Als de t-waarde echter boven zijn kritieke waarde uitkomt, dan zal de kans dat de nulhypothese waar is ($P(H_0)$) kleiner dan het significantieniveau α (0.05) zijn. In dit geval zal de nulhypothese verworpen worden ten gunste van de alternatieve hypothese en is er dus bewezen dat de schattingen van methode 1 significant nauwkeuriger zijn dan die van methode 2.

Combinaties van modellen waarvan resultaten met elkaar vergeleken worden	Resultaat uitgevoerde t-toets
<p style="text-align: center;">B&S & Implicit volatility($t-1$) vs B&S & GARCH(1,1)</p>	<p>H_0: MAE (B&S/Impl.vol.) = MAE (B&S/GARCH) H_1: MAE (B&S/Impl.vol.) < MAE (B&S/GARCH) significantieniveau $\alpha = 0.05$</p> <p>t-waarde = 7.85 $t_{0.05}(265)$-kritiek = 1.651 $P(H_0) = 0.000$</p>
<p style="text-align: center;">B&S & Implicit volatility($t-1$) vs NN & Implicit volatility($t-1$)</p>	<p>H_0: MAE (B&S/Impl.vol.) = MAE (NN/Impl.vol.) H_1: MAE (B&S/Impl.vol.) < MAE (NN/Impl.vol.) significantieniveau $\alpha = 0.05$</p> <p>t-waarde = 3.24 $t_{0.05}(500)$-kritiek = 1.648 $P(H_0) = 0.0006$</p>
<p style="text-align: center;">B&S & Implicit volatility($t-1$) vs NN & GARCH(1,1)</p>	<p>H_0: MAE (B&S/Impl.vol.) = MAE (NN/GARCH) H_1: MAE (B&S/Impl.vol.) < MAE (NN/GARCH) significantieniveau $\alpha = 0.05$</p> <p>t-waarde = 1.8 $t_{0.05}(498)$-kritiek = 1.648 $P(H_0) = 0.0363$</p>
<p style="text-align: center;">NN & Implicit volatility($t-1$) vs B&S & GARCH(1,1)</p>	<p>H_0: MAE (NN/Impl.vol.) = MAE (B&S/GARCH) H_1: MAE (NN/Impl.vol.) < MAE (B&S/GARCH) significantieniveau $\alpha = 0.05$</p> <p>t-waarde = 7.13 $t_{0.05}(269)$-kritiek = 1.651 $P(H_0) = 0.000$</p>
<p style="text-align: center;">NN & GARCH(1,1) vs B&S & GARCH(1,1)</p>	<p>H_0: MAE (NN/GARCH) = MAE (B&S/GARCH) H_1: MAE (NN/GARCH) < MAE (B&S/GARCH) significantieniveau $\alpha = 0.05$</p>

	t-waarde = 7.43 $t_{0.05}(269)$ -kritiek = 1.651 $P(H_0) = 0.000$
<p style="text-align: center;">NN & GARCH(1,1) vs NN & Implicit volatility(t-1)</p>	H_0 : MAE (NN/GARCH) = MAE (NN/Impl.vol.) H_1 : MAE (NN/GARCH) < MAE (NN/Impl.vol.) significantienniveau $\alpha = 0.05$ t-waarde = 1.33 $t_{0.05}(510)$ -kritiek = 1.648 $P(H_0) = 0.092$

Tabel 4) De resultaten van de uitgevoerde t-toetsen. De combinaties van modellen worden onderling met elkaar vergeleken waarbij getest wordt of de MAE van de ene methode significant kleiner is dan de MAE van de andere methode (bij een α van 5%). De **roodgekleurde** uitkomsten van de t-toets betekenen dat de nulhypothese van de toets verworpen kan worden ($P(H_0) < \alpha$). Een **blauwgekleurde** uitkomst betekent dat de nulhypothese niet verworpen mag worden ($P(H_0) \geq \alpha$).

Hoofdstuk 5

Conclusies

Na het uitvoeren van de statistische toetsen kan er geconcludeerd worden dat de combinatie van het Black-Scholes model en de implicit volatility ($t-1$) de nauwkeurigste schattingen van call optieprijsen heeft opgeleverd.

Immers, de Mean Absolute Error die deze combinatie opleverde op de testset, was significant lager (bij $\alpha = 0.05$) dan die van de overige drie combinaties.

Dit impliceert ook dat de implicit volatility van de vorige dag een goede maatstaf is voor de implicit volatility van vandaag. Hierdoor valt de implicit volatility van gisteren goed te gebruiken bij het bepalen van de prijs van een optie vandaag.

De beide neurale netwerken (in combinatie met de implicit volatility dan wel de GARCH(1,1) volatiliteit) leverden vergeleken met het Black-Scholes model/implicit volatility ($t-1$) ook zeer nauwkeurige schattingen op. De MAE's van de neurale netwerken waren slechts enkele eurocenten (3 eurocent en 5 eurocent) hoger dan de MAE van de combinatie Black-Scholes model/implicit volatility ($t-1$). Het verschil tussen de MAE's van de beide neurale netwerken was niet significant en er kan dus niet geconcludeerd worden of één van beide neurale netwerken beter presteerde dan de andere.

De combinatie Black-Scholes model/GARCH(1,1) leverde veruit de hoogste MAE op (65 eurocent) en genereerde van de vier combinaties van modellen dus de minst nauwkeurige schattingen van call optieprijsen.

Opvallend waren de prestaties van deze combinatie wanneer de testset verdeeld werd in een stuk met daggegevens van opties met een resterende looptijd van minder dan 50 dagen en een stuk waarbij de resterende looptijd meer dan 50 dagen was.

Het feit dat de schattingen bij opties met een relatief langere looptijd absoluut gezien wat minder nauwkeurig zijn dan bij opties met een relatief kortere looptijd, is vrij logisch. Dit vanwege het feit dat er veel meer onzekerheid heerst omtrent de koersontwikkeling van het onderliggende aandeel bij een langere looptijd (hoe langer de resterende looptijd, hoe meer onzekerheid er is rondom de toekomstige volatiliteit).

Hetzelfde geldt voor de rentestand. Hoe langer de resterende looptijd, hoe groter de kans dat de rente meer gaat fluctueren. Het Black-Scholes model gaat daarentegen uit van een constante risicovrije rente tijdens de rest van de looptijd.

Door een grotere kans op een heviger fluctuerende volatiliteit en risicovrije rente bij een langere looptijd is het dus moeilijker een goeie prijs voor een optie vast te stellen.

Bij alle combinaties van modellen is de MAE voor de opties met kortere looptijden (≤ 50 dagen) dan ook kleiner dan bij opties met grotere looptijden (> 50 dagen). Het verschil is bij de combinatie B&S/GARCH(1,1) ($MAE_{\text{testset 2}} \sim 4.67 * MAE_{\text{testset 1}}$) is echter vele malen groter dan bij de overige drie combinaties van modellen.

Dit kan erop duiden dat de manier waarop GARCH(1,1) in dit onderzoek gebruikt is minder geschikt is wanneer de looptijden langer worden. Om nauwkeurigere schattingen te maken van volatilititeiten, moet misschien de verversingsfrequentie van de

GARCH(1,1) parameters (α , β en γ) groter gemaakt worden (i.p.v. om de 10 dagen verversen, elke dag verversen). Het kan ook zijn dat de schattingen beter worden als de GARCH(1,1) parameters gebaseerd worden op meer dan 30 dagen, zoals in dit onderzoek gedaan is (zie hoofdstuk *Experimentele set-up*).

Hoofdstuk 6

Verder onderzoek

Het onderzoek zou op de volgende manieren uitgebreid kunnen worden:

- Aan het lijstje met onderzochte combinaties van modellen zouden nieuwe combinaties toegevoegd kunnen worden. Een ander model om de optiewaarde mee te bepalen zou het binomiale model kunnen zijn. Naast het neurale netwerk zouden ook andere leeralgoritmen als ID3 en C4.5 gebruikt kunnen worden [5]. Andere modellen/methoden om de volatiliteit te berekenen zouden de historische volatiliteit, het EWMA model of een ander GARCH(x,y) model (bijv. GARCH(10,10) kunnen zijn.
- In de conclusie werd al opgemerkt dat de schattingen van de combinatie Black-Scholes model/GARCH(1,1) misschien nauwkeuriger zouden zijn als de verversingsfrequentie van de GARCH(1,1) parameters (a , β en γ) verhoogd zou worden, evenals het aantal dagen waarop de parameters gebaseerd worden. Het zou de moeite waard zijn om te onderzoeken of deze veranderingen inderdaad invloed zouden hebben op de nauwkeurigheid van de schattingen. De GARCH(1,1) parameters zouden bijvoorbeeld dagelijks verversst kunnen worden en gebaseerd zijn op de recentste 100 dagen.
- De resultaten op de testset zouden verder geanalyseerd kunnen worden door te kijken naar de prestaties van de combinaties van modellen op bijvoorbeeld alleen in-the-money opties dan wel out-of-the-money opties.
- Aangezien leeralgoritmen (bv. een neurale netwerk) niet gebonden zitten aan een vast aantal inputparameters (zoals het Black-Scholes model), zou onderzocht kunnen worden of het toevoegen van extra verklarende variabelen ten aanzien van de optieprijs (althans, of deze extra variabelen inderdaad gecorrleerd zijn met de optieprijs zal moeten blijken) effect heeft op de nauwkeurigheid van de schattingen.



Hoofdstuk 7

Referenties

- [1] J.C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th Edition 2003, Prentice Hall.
- [2] F. Black en M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 1973, vol. 81.
- [3] R. Engle, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, 1982, vol. 50.
- [4] T. Bollerslev, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 1986, vol. 31.
- [5] Tom M. Mitchell, *Machine Learning*, International Edition 1997, McGraw-Hill.
- [6] A.D. Aczel en J. Sounderpandian, *Complete Business Statistics*, 5th edition 2002, McGraw-Hill.
- [7] www.dnb.nl, website van De Nederlandse Bank.
- [8] W. Wiegierinck, Stochastische dynamica van on-line leren in neurale netwerken, internet. (www.mbfys.kun.nl/~winw/samenvatting.html)
- [9] S. Gielen en B. Kappen, Neurale netwerken en hun toepassingen, internet, 7 januari 1995. (www.cram.nl/ieni/950107.htm)
- [10] www.fintools.com, website van Montgomery Investment Technology Inc., ontwikkelaar van FinTools[®] software.
- [11] www.cs.waikato.ac.nz/~ml/weka, website van de universiteit van Waikato waarop het software pakket WEKA (freeware) wordt aangeboden.
- [12] www.savestockoptions.org/experts03, website van de IESOC (International Employee Stock Options Coalition) waarop o.a. uitspraken van financiële experts te vinden zijn over bijvoorbeeld het Black-Scholes model.
- [13] www.datastream.net, website van het Datastream systeem waarmee historische financiële gegevens op te vragen zijn.
- [14] www.solver.com, website met meer informatie over de Excel Solver.

Hoofdstuk 8

Bijlagen

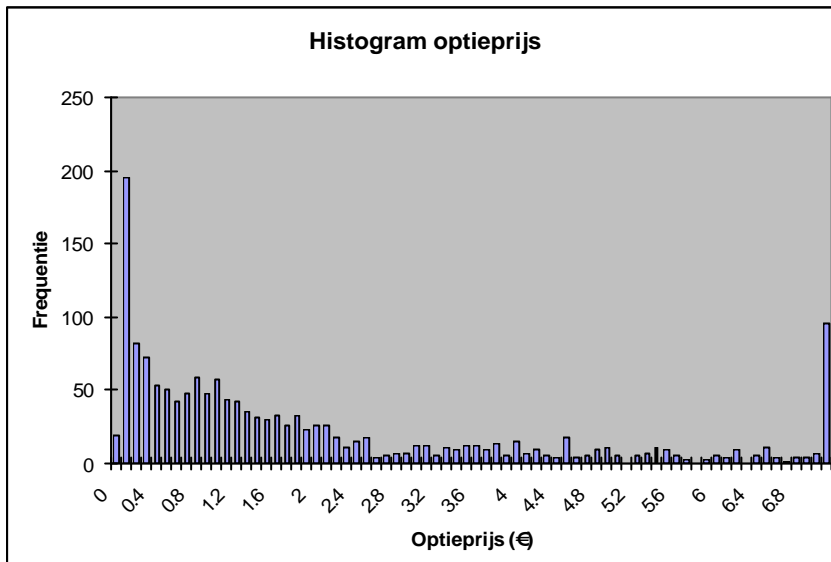


De gebruikte dataset bestond uit 1520 datarecords. Hierin waren de daggegevens van 15 verschillende opties verwerkt. De opties die in de dataset zaten staan overzichtelijk in tabel 5:

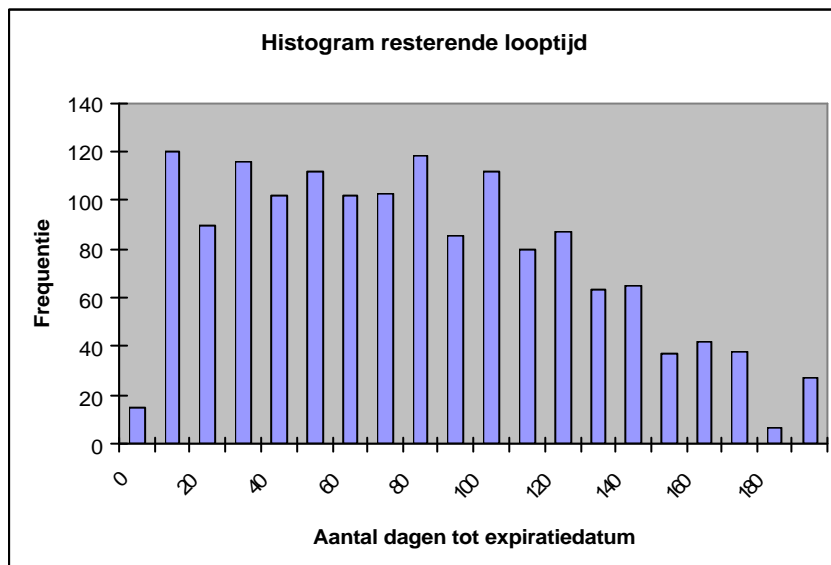
Onderliggend aandeel	Looptijd	Uitoefenprijs	Aantal daggegevens
Unilever	01-06-01 t/m 19-10-01	€ 65.00	100
AAB	01-06-01 t/m 19-10-01	€ 27.00	100
AAB	03-06-02 t/m 18-10-02	€ 18.00	100
ING	03-06-02 t/m 18-10-02	€ 22.00	100
Unilever	01-06-01 t/m 19-10-01	€ 60.00	100
Philips	01-05-00 t/m 20-10-00	€ 45.00	118
AAB	03-01-00 t/m 20-04-00	€ 20.00	76
VNU	24-03-00 t/m 21-07-00	€ 60.00	73
Unilever	01-05-00 t/m 20-10-00	€ 55.00	118
AH	01-02-00 t/m 21-07-00	€ 30.00	113
AAB	02-01-03 t/m 17-04-03	€ 16.00	76
RD	03-02-03 t/m 18-07-03	€ 40.00	117
Philips	03-02-03 t/m 18-07-03	€ 18.00	117
ASML	02-01-03 t/m 21-03-03	€ 8.00	55
AAB	09-03-01 t/m 19-10-01	€ 22.00	157
TOTAAL			1520

Tabel 5) De opties die werden gebruikt in de dataset.

Per datarecord bestonden de volgende attributen: uitoefenprijs, aandeelkoers, optieprijs, risicovrije rente, resterende looptijd, impliciet volatility ($t-1$) en de GARCH(1,1) volatiliteit. Van enkele van deze attributen staan hieronder de frequentieverdelingen. Hierdoor kan er een beter idee gekregen worden van bijvoorbeeld de waarden van de opties die in de dataset verwerkt waren.



Figuur 4) Histogram van het attribuut optieprijs. Laat de frequentieverdeling van de waarden van dit attribuut zien. De getallen op de x-as moeten één streepje naar rechts verplaatst worden.



Figuur 5) Histogram van het attribuut resterende looptijd. De getallen op de x-as moeten één streepje naar rechts verplaatst worden. Er valt dan bijvoorbeeld af te lezen dat er ongeveer 120 datarecords waren waar de resterende looptijd in het interval [0,10] lag.

2

Zoals al eerder vermeld zijn de neurale netwerken gegenereerd met behulp van het WEKA softwarepakket. Meer gegevens over de twee uitgekozen neurale netwerken, bijvoorbeeld de gewichten van de verbindingen in het netwerk, zijn hieronder te vinden.

Neuraal netwerk 1) Genereert schattingen van optieprijsen op basis van de volgende (input)parameters: uitoefenprijs, aandeelkoers, risicovrije rente, looptijd en implicit volatility (t-1).

=== Run information ===

```

Scheme:   weka.classifiers.functions.MultilayerPerceptron -L 0.1 -M 0.3 -N 30000 -V 0 -S 0 -E 20 -H "6,
6" -G -B -R
Relation: optiedata-trainingset/validatieset-weka.filters.unsupervised.attribute.Remove-R7
Instances: 762
Attributes: 6
           uitoefenprijs, optieprijs, aandeelprijs, rente, looptijd, implied-volatility
Test mode: user supplied test set: 256
instances

```

=== Classifier model (full training set) ===

Linear Node 0

Inputs Weights
 Threshold 1.5000169407073338
 Node 7 -2.2925908227068335
 Node 8 -1.050166812179923
 Node 9 -1.3989744109795599
 Node 10 -1.647457486096649
 Node 11 -0.8270001110832619
 Node 12 -3.8544509250798478

Sigmoid Node 1

Inputs Weights
 Threshold -2.510706651997558
 Attrib uitoevenprijs -4.536138680933255
 Attrib aandeeleprijs 4.992046563856713
 Attrib rente 5.009791658929784
 Attrib looptijd 1.0254445525840592
 Attrib implied-volatility 2.269837944389821

Sigmoid Node 2

Inputs Weights
 Threshold -4.061942698774323
 Attrib uitoevenprijs -9.297579249269914
 Attrib aandeeleprijs 10.204275306342446
 Attrib rente 0.5567907728145128
 Attrib looptijd -0.09608442286651746
 Attrib implied-volatility -

1.1758010727121289

Sigmoid Node 3

Inputs Weights
 Threshold -1.2323892338745106
 Attrib uitoevenprijs 0.8120778917913942
 Attrib aandeeleprijs -1.4202637300839167
 Attrib rente -0.2653591931402227
 Attrib looptijd 2.357062870923625
 Attrib implied-volatility -3.899478427548879

Sigmoid Node 4

Inputs Weights
 Threshold 3.056797645166717
 Attrib uitoevenprijs 1.7828085447799258
 Attrib aandeeleprijs -1.9795038758320613
 Attrib rente -3.1355668508411685
 Attrib looptijd -1.006038391539906
 Attrib implied-volatility

1.4363066097723194

Sigmoid Node 5

Inputs Weights
 Threshold -4.222044296370225
 Attrib uitoevenprijs -8.652925097254485
 Attrib aandeeleprijs 9.813929363474218
 Attrib rente -0.9912020173573687
 Attrib looptijd 0.8916382191565964
 Attrib implied-volatility -1.737377944756789

Sigmoid Node 6

Inputs Weights
 Threshold 5.197226802226801
 Attrib uitoevenprijs -2.328885709252282
 Attrib aandeeleprijs 3.975810613076204
 Attrib rente 0.6177639056013903

Attrib looptijd 1.0323926605392142
 Attrib implied-volatility 7.979547711841286

Sigmoid Node 7

Inputs Weights
 Threshold -0.6968910499563777
 Node 1 -0.3403183753050902
 Node 2 -3.0844435170461026
 Node 3 -4.1286796400338375
 Node 4 -2.059812626105691
 Node 5 -0.7753326782693643
 Node 6 -0.633946952063087

Sigmoid Node 8

Inputs Weights
 Threshold -1.4733639868041826
 Node 1 -3.1865436022335647
 Node 2 -2.2289166189921357
 Node 3 -0.4202252992946288
 Node 4 1.4271483311559487
 Node 5 -1.5511014287164333
 Node 6 2.716180495229886

Sigmoid Node 9

Inputs Weights
 Threshold -2.7100371405549657
 Node 1 -0.1258698297999001
 Node 2 -3.0197298974993005
 Node 3 -0.7744227042117905
 Node 4 2.4825794517411834
 Node 5 -2.8240778516974228
 Node 6 -4.144094942768012

Sigmoid Node 10

Inputs Weights
 Threshold 2.8621930035307694
 Node 1 -0.6391766049351306
 Node 2 -1.3977584784835562
 Node 3 -0.09897897445865757
 Node 4 -0.7410681632785889
 Node 5 -2.188240244266889
 Node 6 -1.2496778917287645

Sigmoid Node 11

Inputs Weights
 Threshold 2.691185127226647
 Node 1 -0.7293398514297345
 Node 2 -6.006134986295716
 Node 3 1.7692625693346127
 Node 4 -4.785143078097885
 Node 5 -2.3359596083746235
 Node 6 -8.692053036133307

Sigmoid Node 12

Inputs Weights
 Threshold 1.4258670337041894
 Node 1 0.3812390092555235
 Node 2 -4.938922091654676
 Node 3 -5.048359774463163
 Node 4 -3.2539655413217186
 Node 5 -0.8693750824166951
 Node 6 -0.7333748872657805

Class

Input
 Node 0

Time taken to build model: 2314.18 seconds

=== Evaluation on test set ===

=== Summary ===

Correlation coefficient	0.9946
Mean absolute error	0.1610
Root mean squared error	0.2453
Relative absolute error	9.9777 %
Root relative squared error	10.3586 %
Total Number of Instances	256

Neuraal netwerk 2) Genereert schattingen van optieprijsen op basis van de volgende (input)parameters: uitoefenprijs, aandeelkoers, risicovrije rente, looptijd en GARCH(1,1) volatiliteit.

=== Run information ===

Scheme: weka.classifiers.functions.MultilayerPerceptron -L 0.1 -M 0.3 -N 30000 -V 0 -S 0 -E 20 -H "6,6" -G -B -R
 Relation: optiedata-trainingsset/validatieset-weka.filters.unsupervised.attribute.Remove-R6
 Instances: 762
 Attributes: 6
 uitoefenprijs, optieprijs, aandeelprijs, rente, looptijd, garch-volatility
 Test mode: user supplied test set: 256 instances

=== Classifier model (full training set) ===

Linear Node 0

Inputs	Weights
Threshold	3.1360809732230823
Node 7	-1.080818352322205
Node 8	-1.5068305009002017
Node 9	-1.6963786629402742
Node 10	-0.919692248543843
Node 11	-2.996214974546254
Node 12	-1.7145699355934902

Sigmoid Node 1

Inputs	Weights
Threshold	1.9890714380998513
Attrib uitoefenprijs	-6.087904056906244
Attrib aandeelprijs	8.147513680153896
Attrib rente	-2.316387767520857
Attrib looptijd	0.48256126186162895
Attrib garch-volatility	1.6970199015586915

Sigmoid Node 2

Inputs	Weights
Threshold	-2.416658324592652
Attrib uitoefenprijs	-10.839289441356815
Attrib aandeelprijs	12.030814426129664
Attrib rente	0.17001562102912451
Attrib looptijd	0.17692658031347566
Attrib garch-volatility	0.08168185882326948

Sigmoid Node 3

Inputs	Weights
Threshold	-0.6067995907297076
Attrib uitoefenprijs	-3.865257848303059
Attrib aandeelprijs	5.30743814621465
Attrib rente	-3.0303443734589783
Attrib looptijd	-2.550130707083273
Attrib garch-volatility	0.6923567440409741

Sigmoid Node 4

Inputs	Weights
Threshold	5.971379051430351

Attrib uitoefenprijs	4.641741110450605
Attrib aandeelprijs	-8.105132808030916
Attrib rente	-4.6286132761708485
Attrib looptijd	0.47546001801394805
Attrib garch-volatility	4.7320530700808145

Sigmoid Node 5

Inputs	Weights
Threshold	-4.5911981641640525
Attrib uitoefenprijs	-5.575645785686061
Attrib aandeelprijs	6.073436002206477
Attrib rente	-3.5927011034030265
Attrib looptijd	-2.564928793802169
Attrib garch-volatility	-4.442598330663487

Sigmoid Node 6

Inputs	Weights
Threshold	-1.1914731270102072
Attrib uitoefenprijs	5.063155176442585
Attrib aandeelprijs	4.3255898006237254
Attrib rente	3.151451126128835
Attrib looptijd	1.9994607770885238
Attrib garch-volatility	3.114141940335431

Sigmoid Node 7

Inputs	Weights
Threshold	-0.24120878916508545
Node 1	-2.1107277459350464
Node 2	-6.255001715384657
Node 3	0.7577532348012935
Node 4	-2.8636505052265107
Node 5	-2.0022531383436206
Node 6	1.9124566604335993

Sigmoid Node 8

Inputs	Weights
Threshold	-2.539800505029317
Node 1	1.2080476672465714
Node 2	-2.259907238675628
Node 3	2.5801095120062083
Node 4	-3.498774655980561
Node 5	0.42384637516801393

Node 6 -1.1056295439344521
 Sigmoid Node 9
 Inputs Weights
 Threshold -0.9217565213694175
 Node 1 0.9261446572808071
 Node 2 -2.8079250533665774
 Node 3 -0.8051679640973178
 Node 4 -0.9802723874915922
 Node 5 0.6825441470016379
 Node 6 -4.160044570634353
 Sigmoid Node 10
 Inputs Weights
 Threshold -1.0456311013181572
 Node 1 -3.0708648922006097
 Node 2 -5.811390984374517
 Node 3 4.120304391323865
 Node 4 4.196585081969971
 Node 5 -2.9995651695425023
 Node 6 -0.7015988703608507
 Sigmoid Node 11

Inputs Weights
 Threshold 5.5385713324490995
 Node 1 -2.904995071652129
 Node 2 -3.3128749570547935
 Node 3 -0.7197518939764528
 Node 4 0.01670200470506902
 Node 5 -0.003328914633138503
 Node 6 1.2564797628523947
 Sigmoid Node 12
 Inputs Weights
 Threshold -2.303905920807561
 Node 1 0.8906808404517667
 Node 2 -2.68708151026925
 Node 3 2.702268726926367
 Node 4 -3.675114700541855
 Node 5 -0.055177781409611285
 Node 6 -1.370097043482319
 Class
 Input
 Node 0

Time taken to build model: 2667.35 seconds

=== Evaluation on test set ===

=== Summary ===

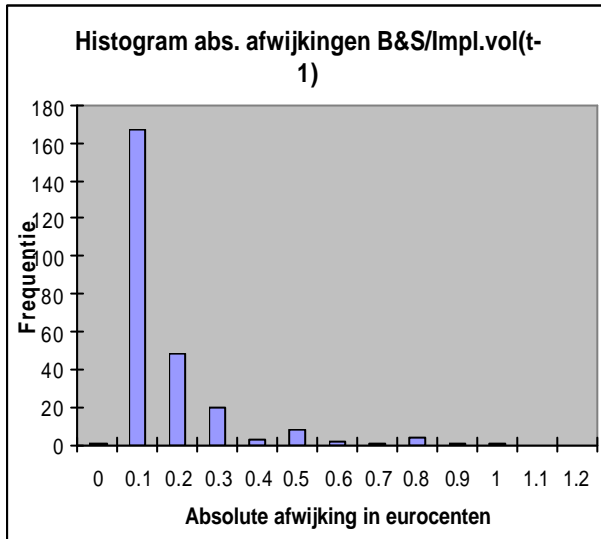
Correlation coefficient	0.9935
Mean absolute error	0.1401
Root mean squared error	0.2353
Relative absolute error	9.5315 %
Root relative squared error	10.5167 %
Total Number of Instances	256

3 →

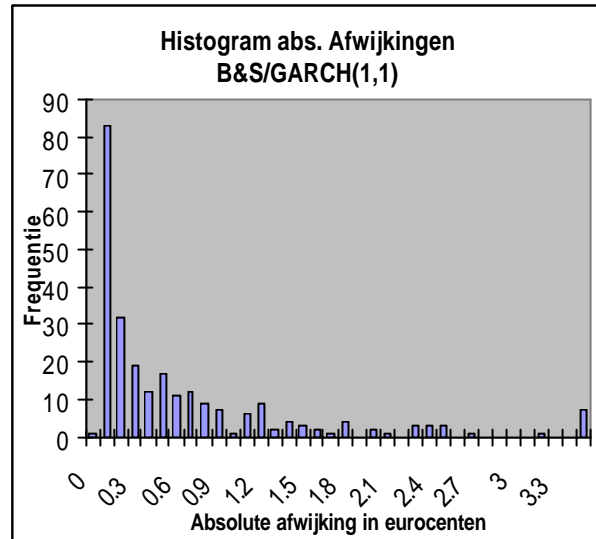
Hieronder (figuur 6, 7, 8 en 9) staan enkele histogrammen van de absolute afwijkingen (| Schatting optieprijs – werkelijke optieprijs |) die door de vier combinaties van modellen geproduceerd werden op de 256 testinstanties.

De getallen op de x-as horen bij het streepje dat rechtsboven van het getal staat.

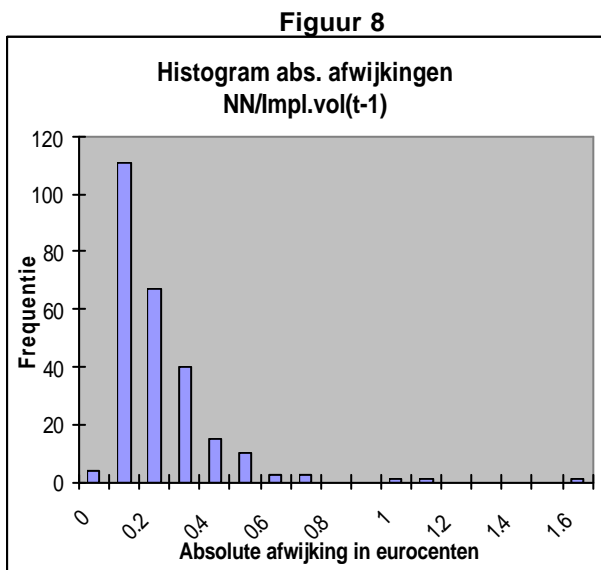
In figuur 6 valt dan bijvoorbeeld af te lezen dat er ongeveer 170 schattingen waren waarvan de absolute afwijking lag in het interval $[0,0.1]$.



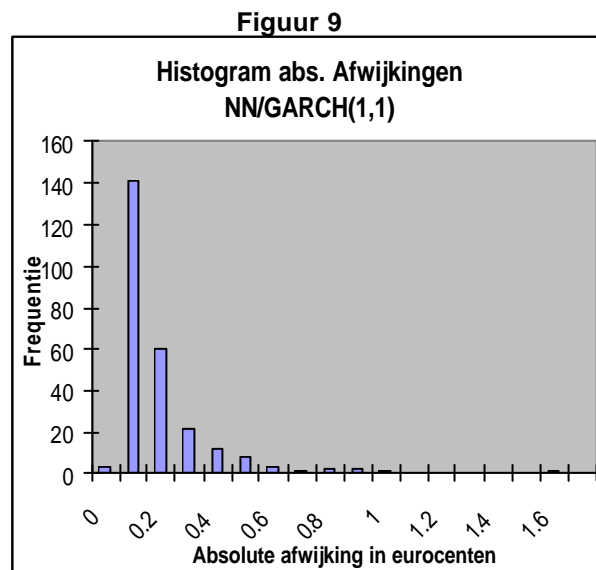
Figuur 6



Figuur 7



Figuur 8



Figuur 9