



Analyse en beheer van financieel risico van aandelen

door J.J. Huij

**onder begeleiding van dr. ir. J. van den Berg
en drs. W.M. van den Bergh**

**afstudeerscriptie Informatica & Economie
Erasmus Universiteit Rotterdam**



Inhoudsopgave

1. Voorwoord en dankbetuiging	3
2. Inleiding, probleemstelling en opzet.....	4
2.1 Inleiding	4
2.2 Probleemstelling en opzet	5
3. Methodologie en model rendementgenererende proces.....	6
3.1 Efficiënte markthypothese en Markov eigenschap.....	6
3.2 Centrale limietstelling en normale verdeling	6
3.3 Rendementgenererende proces en volatiliteit	7
4. Toepassing financieel risicobeheer.....	10
4.1 Black-Scholes Model.....	10
4.2 Hedging.....	13
5. Modellen volatiliteit en rekenmethoden.....	17
5.1 ARCH, GARCH(x,y) en EWMA	17
5.2 Maximum likelihood methode.....	20
6. Uitbreiding model rendementgenererende proces en rekenmethoden.....	23
6.1 Verborgene Markov proces	23
6.2 Forward-backward methode.....	24
6.3 Viterbi methode.....	25
6.4 Baum-Welch methode	26
7. Alternatieve rekenmethode voor uitgebreid model	28
7.1 n-GRID methode	28
7.2 Optimalisatie en uitbreidingen	31
8. Vergelijking modellen en rekenmethoden.....	34
9. Conclusies en aanbevelingen.....	36
10. Literatuurlijst.....	37

1. Voorwoord en dankbetuiging

Dit onderzoek is geschreven als afstudeerscriptie voor de studie Informatica & Economie (I&E) aan de Erasmus Universiteit te Rotterdam. I&E is in augustus 1998 van start gegaan als zelfstandige opleiding. De opleiding vindt haar oorsprong in de voormalige afstudeerrichting Bestuurlijke Informatica (BI) van de studie Econometrie. De propedeuse Econometrie, die onderdeel uitmaakte van het curriculum van BI, is bij I&E vervangen door de propedeuse Economie. Daarnaast zijn er nog wat nuance verschillen tussen BI en I&E met betrekking tot de afstudeerrichtingen. I&E onderscheidt momenteel een drietal verschillende richtingen: Information Management, e-Business en Artificial Intelligence & Economics (AI&E). Tezamen met een tweetal werkcolleges en een aantal keuzevakken valt deze afstudeerscriptie onder de afstudeerrichting AI&E en meer specifiek onder de richting Computational Finance. Het onderzoeksgebied van deze richting heeft voornamelijk betrekking op het formuleren van (niet-parametrische) modellen en rekenmethoden voor de financiële wereld.

De twee voorgaande werkcolleges introduceerden verschillende modellen en rekenmethoden om financiële tijdreeksen te analyseren en hebben hiermee de basis gevormd voor dit onderzoek. Naast het aanreiken van deze kennis, hebben de begeleiders van deze werkcolleges, Jan van den Berg en Willem-Max van den Bergh, mij enthousiast gemaakt voor het vakgebied Computational Finance en mij gestimuleerd om mijn scriptie in deze richting te schrijven door op een zeer positieve manier feedback te geven en altijd bereid te zijn vragen te beantwoorden en extra materiaal te verschaffen. Ik zou hen daarvoor bij deze willen bedanken.

Daarnaast zijn er nog vele andere mensen, die mij op zeer uiteenlopende manieren ondersteund of afgeleid hebben. Dit liep uiteen van het geven van kritische feedback, bij sommige personen veelal onder het genot van een alcoholische versnapering, tot mij ertoe dwingen werk te verrichten. De betreffende mensen weten wie ik bedoel. Bij deze bedank ik ook hen. Is het niet voor een bijdrage aan mijn scriptie, dan is het wel voor goed gezelschap.

In het bijzonder wil ik mijn ouders ervoor bedanken dat zij mij de mogelijkheid hebben gegeven om te studeren en dat zij mijn studie ook altijd ondersteund hebben.

Ook wil ik mijn begeleider, Jan van den Berg, nogmaals in het bijzonder bedanken. Deze stond altijd klaar om kritische en positieve feedback te geven, vragen te beantwoorden en extra materiaal te verschaffen. Behalve mij op een professionele manier te begeleiden heeft hij mij geïnspireerd en geholpen om aan een promotietraject aan de universiteit te beginnen.

2. Inleiding, probleemstelling en opzet

De laatste decennia is de relevantie van gedegen analyse en beheer van financieel risico gebleken. Financiële debacles zoals de Metallgesellschaft- en de Orange County-affaire zijn voorbeelden van de rampzalige gevolgen, die financieel wanbeleid op dit gebied ten gevolg kan hebben.

2.1 Inleiding

Vanaf 1990 was een aantal jaren achtereen sprake van een sterke daling van de rente. Uiteindelijk werd in 1993 een historisch laagtepunt bereikt. Orange County, een groot Amerikaans bedrijf, besloot toen om een aanzienlijk geldbedrag tegen de toenmalige lage rente te lenen om vervolgens van dit bedrag obligaties met een hogere rentevergoeding te kopen. Deze strategie zou zeer winstgevend zijn als de rente verder zou dalen of laag zou blijven. In 1994 steeg de rente echter explosief. De waarde van de portefeuille verminderde hierdoor dramatisch. Orange County besloot deze daarop te liquideren. Het resultaat hiervan was een verlies van \$1.7 miljard...

Eveneens begin jaren '90 sloot Metallgesellschaft, een groot Duits bedrijf, een zeer grote hoeveelheid leveringscontracten af om gedurende tien jaar lang olie tegen een van tevoren vastgestelde prijs aan haar klanten te leveren. Door de leveringsprijs van tevoren vast te stellen was de onderneming zeker van haar toekomstige inkomsten. De inkoopprijs van de te leveren olie was echter aan risico onderhevig. Indien de inkoopprijs van de olie zou stijgen, zou de onderneming minder winst maken omdat de verkoopprijs immers vast stond. Het was zelfs mogelijk dat de inkoopprijs hoger zou zijn dan de verkoopprijs. Om dit financiële risico te beheren ging de onderneming over tot de aanschaf van termijncontracten, waarin gedurende de looptijd van de leveringscontracten doorgerold zou worden. Deze strategie wordt wel een *roll-over hedge* [5] genoemd. Indien de prijs van de olie zou stijgen dan zou de winst op deze termijncontracten even groot zijn als het verlies op de leveringscontracten. Hierdoor wordt de inkoopprijs van de olie min of meer vastgelegd. Metallgesellschaft dacht het financieel risico van de inkoopprijs van de olie op deze wijze te elimineren. De olieprijs daalde echter. Hierdoor moest de onderneming haar *margin-verplichting* [5] van de termijncontracten nakomen. Hierdoor vloeide op korte termijn zeer veel geld uit de onderneming. De onderneming beredeneerde dat op de lange termijn per saldo winst behaald zou worden omdat door de lage inkoopprijs van olie veel winst gerealiseerd zou worden op de leveringscontracten. Dat was weliswaar correct. Echter, de gigantische hoeveelheid geld die op korte termijn uit de onderneming wegvloede, bracht de liquiditeit en daarmee de continuïteit van de onderneming in gevaar. Metallgesellschaft besloot uiteindelijk haar positie te sluiten. Dit resulteerde in een verlies van \$1,3 miljard...

Deze voorbeelden onderbouwen de relevantie van analyse en beheer van financieel risico. Een willekeurige, gerapporteerde risicoanalyse had het debacle van Orange County kunnen voorkomen, gedegen risicobeheer dat van Metallgesellschaft.

Om financieel risico te analyseren en beheren, zijn in de loop der tijd verschillende modellen en rekenmethoden ontwikkeld. Het algemene idee van een model is dat verbanden tussen bepaalde entiteiten binnen een afgebakende context vastgelegd kunnen worden op basis van eigenschappen van deze entiteiten. Door de afbakening van de context waarbinnen het model geldig is, is een model een gesimplificeerde weergave van een bepaalde situatie. Buiten de gespecificeerde context hoeven de gemodelleerde verbanden niet geldig te zijn. De kracht van het beschrijvend vermogen van een model is hierdoor sterk afhankelijk van de aannames die omtrent een bepaalde situatie gedaan kunnen worden. Er zijn situaties denkbaar waarvan modellen, die vandaag de dag zeer populair zijn, geen correcte beschrijving hoeven te geven omdat bepaalde aannames onterecht worden gedaan. Inzicht in de achterliggende methodologie van een model is cruciaal voor correcte toepassing van dat model. Incorrecte toepassing van een model kan namelijk leiden tot rampzalige gevolgen.

2.2 Probleemstelling en opzet

Essentieel voor de analyse en het beheer van risico van aandelen zijn modellen om het verloop van het risico van aandelen over de tijd te beschrijven. Een populaire klasse van deze modellen zijn de zogenaamde ARCH [5] modellen. De beschrijving van het verloop van het risico van aandelen over de tijd wordt door deze modellen door middel van een autoregressieve vergelijking weergegeven. Hierdoor wordt het adaptievermogen van het model echter beperkt. Immers, de schatting van het risico op een willekeurig tijdstip neigt naar de trend uit het verleden. Indien sprake is van een harde trendbreuk, is de schatting van het risico gedurende een korte periode na deze breuk onzuiver. In dit onderzoek zal geëvalueerd worden in hoeverre *verborgen Markov ketens* [6] als alternatief model gebruikt kunnen worden om een beschrijving te geven van dit risico ten tijde van een trendbreuk.

De opzet van dit onderzoek is als volgt: allereerst heeft het onderzoek een beschrijvende functie. Hiertoe zal een basaal model voor rendementen van aandelen geformuleerd worden en zal de achterliggende methodologie van dit model beschreven worden. Op basis van eigenschappen van de markt waarop deze aandelen verhandeld worden, is het mogelijk om een beschrijving te geven van het risico van deze aandelen in termen van kansdichtheid. Op basis van dit model zijn verschillende toepassingen denkbaar in het kader van financieel risicobeheer. Van een dergelijke toepassing zal een voorbeeld gegeven worden en er zal worden aangetoond hoe belangrijk het is om het verloop van het risico van aandelen goed te kunnen schatten. Daarna zullen de eerder genoemde ARCH modellen beschreven worden en zal aannemelijk gemaakt worden in welke situaties deze modellen geen goede schatting kunnen maken van het verloop van dit risico. Vervolgens zal een verborgen Markov model als alternatief worden aangedragen. Dit model vereist echter wat aanpassingen, wil dit goed bruikbaar zijn op financiële tijdreeksen. Hiertoe zal een rekenmethode specifiek voor dit onderzoek worden ontwikkeld. Tenslotte zullen de prestaties van de verschillende modellen vergeleken worden en kan geconcludeerd worden of en in hoeverre een verborgen Markov model een betere beschrijving van het verloop van risico van aandelen over de tijd weer kan geven ten opzichte van de ARCH modellen.

3. Methodologie en model rendementgenererende proces

In dit onderdeel zal een basaal model geformuleerd worden voor rendementen van aandelen. De achterliggende methodologie is ontleend aan het boek *Options, Futures & other derivatives* [5] geschreven door John Hull.

3.1 Efficiënte markthypothese en Markov eigenschap

Volgens de zwakke vorm van de *efficiënte markthypothese* [1] (EMH) is alle historische informatie in de prijs van een aandeel verwerkt. Dit wordt veroorzaakt door de aanwezige competitie op de markt. Indien een patroon ontdekt zou worden waarmee risicovrije winst behaald zou kunnen worden, zou de vraag naar het betreffende aandeel direct stijgen. Dit leidt direct tot een prijsstijging, zodat geen risicovrije winst meer behaald kan worden en het patroon teniet wordt gedaan. Een proces waarvan het historisch verloop geen invloed heeft op het verloop ervan in de toekomst staat in de wiskunde bekend als een *Markov proces* [2]. In het verlengde van de gedachtegang van de efficiënte markthypothese kan het rendementgenererende proces van aandelen beschouwd worden als een Markov proces en zijn elkaar opvolgende rendementen onafhankelijk.

3.2 Centrale limietstelling en normale verdeling

De *centrale limietstelling* [4] stelt dat indien onafhankelijke, stochastische variabelen elkaar opvolgen, de resulterende kansverdeling over een bepaalde tijdsperiode naar een *normale verdeling* [2] neigt. Indien verondersteld wordt dat het rendementgenererende proces van aandelen een Markov proces volgt en elkaar opvolgende rendementen onafhankelijk zijn, dan kan gesteld worden dat de resulterende kansverdeling van deze rendementen over een bepaalde tijdsperiode normaal verdeeld is. Een normale kansverdeling wordt volledig beschreven door de volgende kansdichtheidfunctie:

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{s \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2s^2}\right)$$

Deze kansdichtheidfunctie heeft twee parameters: de verwachtingswaarde m en de standaarddeviatie s . De verwachtingswaarde van de normale kansverdeling komt tot stand door alle individuele verwachtingswaarden van de onderliggende, stochastische variabelen over de betreffende tijdsperiode te sommeren. In dit geval zijn de onderliggende, stochastische variabelen rendementen dS/S over zeer korte tijdsperiodes.

De verwachtingwaarde m van rendementen over een bepaalde, langere tijdsperiode T is derhalve:

$$(2) \quad m = \sum_{t=1}^T E(dS/S_t)$$

Hierbij staat $E(dS/S_t)$ voor de verwachtingwaarde van het rendement dS/S op tijdstip t .

De standaarddeviatie is een maatstaf voor de mate van onzekerheid omtrent de verwachtingwaarde. De variantie, het kwadraat van de standaarddeviatie, is het gekwadrateerde verschil tussen de waarde van een stochastische variabele en de verwachtingwaarde ervan. De variantie van de normale kansverdeling komt tot stand door alle individuele varianties van de onderliggende, stochastische variabelen over de betreffende tijdsperiode te sommeren. De variantie s^2 van rendementen over een bepaalde tijdsperiode T is derhalve:

$$(3) \quad s^2 = \sum_{t=1}^T [dS/S_t - E(dS/S_t)]^2$$

Het is hierbij niet relevant uit welke kansverdelingen de onderliggende, stochastische variabelen afkomstig zijn. Er hoeven dus geen additionele aannames te worden gemaakt omtrent het proces dat deze variabelen genereert. Slechts op basis van de veronderstelling dat het rendementgenererende proces van aandelen een Markov proces volgt en dat elkaar opvolgende rendementen onafhankelijk zijn, kan gesteld worden dat de resulterende kansverdeling van rendementen over een bepaalde tijdsperiode normaal verdeeld is.

3.3 Rendementgenererende proces en volatiliteit

In het verlengde van de EMH kan dus gesteld worden dat rendementen van aandelen over een bepaalde tijdsperiode bij benadering beschouwd kunnen worden als trekkingen uit een normale kansverdeling. Nu zal op basis van deze eigenschap een model geformuleerd worden voor het onderliggende, rendementgenererende proces van aandelen.

Beschouw allereerst de stochastische variabele x , die over een bepaalde tijdsperiode ieder tijdstip onderhevig is aan een stochastische verandering dx , waarbij:

$$(4) \quad dx \sim N(0,1)$$

Hierbij staat $N(0,1)$ voor een normaal verdeelde kansverdeling met verwachtingwaarde 0 en standaarddeviatie 1. Deze specifieke verschijningsvorm van de normale verdeling staat wel bekend als de *standaard normale verdeling* [2]. Het proces dat deze stochastische variabele x over de tijd volgt staat ook wel bekend als een *Wiener proces* [5] of een *Brownse beweging* [5].

Gedurende een korte tijdsperiode van tijdstip t naar tijdstip $t + \Delta t$ zal de waarde veranderen van x naar $x + \Delta x$, waarbij:

$$(5) \quad \Delta x = e\sqrt{\Delta t}, \text{ waarbij } e \sim N(0,1)$$

Namelijk; de individuele verwachtingswaarde en standaarddeviatie van de onderliggende, stochastische variabelen zijn hier respectievelijk 0 en 1. De verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de resulterende normale verdeling over een tijdsperiode Δt zijn derhalve 0 en $\sqrt{\Delta t}$.

Beschouw nu de volgende stochastische variabele y , die over een bepaalde tijdsperiode ieder tijdstip onderhevig is aan een stochastische verandering dy , waarbij:

$$(6) \quad dy \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{s})$$

Hierbij zijn \mathbf{m} en \mathbf{s} willekeurige, constante waarden. De stochastische variabele y volgt dan het volgende proces over de tijd:

$$(7) \quad dy = \mathbf{m}dt + \mathbf{s}dx$$

Dit proces staat ook wel bekend als een *gegeneraliseerd Wiener proces* [5]. Gedurende een korte tijdsperiode van tijdstip t naar tijdstip $t + \Delta t$ zal de waarde veranderen van y naar $y + \Delta y$, waarbij:

$$(8) \quad \Delta y = \mathbf{m}\Delta t + \mathbf{s}e\sqrt{\Delta t}$$

Namelijk; de individuele verwachtingswaarde en standaarddeviatie van de onderliggende, stochastische variabelen zijn hier respectievelijk \mathbf{m} en \mathbf{s} . De verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de resulterende normale verdeling over een tijdsperiode Δt zijn derhalve $\mathbf{m}\Delta t$ en $\mathbf{s}\sqrt{\Delta t}$.

Beschouw nu een meer complexe, stochastische variabele y , die over een bepaalde tijdsperiode ieder tijdstip onderhevig is aan een stochastische verandering dy , waarbij:

$$(9) \quad dy \sim N[\mathbf{m}(y,t), \mathbf{s}(y,t)]$$

Hierbij zijn $\mathbf{m}(y,t)$ en $\mathbf{s}(y,t)$ functies van de waarde van de onderliggende, stochastische variabele y en de tijd t . De stochastische variabele y volgt dan het volgende proces over de tijd:

$$(10) \quad dy = \mathbf{m}(y,t)dt + \mathbf{s}(y,t)dx$$

Dit proces staat ook wel bekend als een *Ito proces* [5]. Gedurende een korte tijdsperiode van tijdstip t naar tijdstip $t + \Delta t$ zal de waarde veranderen van y naar $y + \Delta y$, waarbij Δy als volgt geschat kan worden:

$$(11) \quad \Delta y = \mathbf{m}(y,t)\Delta t + \mathbf{s}(y,t)\mathbf{e}\sqrt{\Delta t}$$

Namelijk; de individuele verwachtingswaarde en standaarddeviatie van de betreffende stochastische variabelen zijn hier respectievelijk $\mathbf{m}(y,t)$ en $\mathbf{s}(y,t)$. Indien de waarden van deze functies gedurende de tijdsperiode Δt (vrijwel) constant blijven, dan zijn de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de resulterende normale verdeling $\mathbf{m}(y,t)\Delta t$ en $\mathbf{s}(y,t)\sqrt{\Delta t}$.

Nu kan op basis van kennis over deze processen en hun (geschatte) verandering over de tijd een model voor het rendementgenererende proces van aandelen geformuleerd worden. Verondersteld wordt dat rendementen dS/S van aandelen beschouwd kunnen worden als een trekking uit een normale kansverdeling met verwachtingswaarde \mathbf{m} en standaarddeviatie \mathbf{s} :

$$(12) \quad dS/S \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{s})$$

Hierbij kunnen \mathbf{m} en \mathbf{s} eventueel over de tijd variabel zijn. Het rendementgenererende proces van aandelen volgt dan het volgende proces over de tijd:

$$(13) \quad dS/S = \mathbf{m}dt + \mathbf{s}dx$$

Dit proces staat ook wel bekend als een *geometrische Brownse beweging* [5]. Gedurende een korte tijdsperiode van tijdstip t naar tijdstip $t + \Delta t$ zal de waarde van het betreffende aandeel veranderen van S naar $S + \Delta S$, waarbij ΔS als volgt geschat kan worden:

$$(14) \quad \Delta S = \mathbf{m}S\Delta t + \mathbf{s}S\mathbf{e}\sqrt{\Delta t}$$

ofwel, de schatting van het rendement over deze korte tijdsperiode is dan:

$$(15) \quad \Delta S/S = \mathbf{m}\Delta t + \mathbf{s}\mathbf{e}\sqrt{\Delta t}$$

Het rendement over een korte periode neigt blijkbaar naar een bepaalde verwachtingswaarde $\mathbf{m}\Delta t$ met een bepaalde mate van onzekerheid $\mathbf{s}\mathbf{e}\sqrt{\Delta t}$ daaromtrent. Deze mate van onzekerheid wordt wel *volatiliteit* [5] genoemd.

4. Toepassing financieel risicobeheer

Op basis van het model, dat in voorgaand hoofdstuk is geformuleerd, zijn verschillende toepassingen denkbaar in het kader van financieel risicobeheer. In dit onderdeel zal een dergelijke toepassing besproken worden. Deze toepassing is gebaseerd op het zogenaamde *Black & Scholes* [5] model. Dit zeer populaire model is op vele manieren gedocumenteerd. De documentatie uit dit onderdeel is ontleend aan het boek *Options, Futures & other derivatives* geschreven door John Hull. Deze toepassing zal aantonen hoe belangrijk het is om een goede schatting te kunnen maken van het verloop van volatiliteit.

4.1 Black-Scholes Model

Het gebruik van derivaten van aandelen is een populair instrument om financieel risico te beheren. Met behulp van derivaten zoals opties en futures is het mogelijk om financieel risico te *hedgen* [5]. Aandelen en derivaten zijn namelijk beide onderliggend aan dezelfde bron van onzekerheid: prijsfluctuaties van het betreffende aandeel. Hierdoor zijn de prijzen van derivaten over een zeer korte periode perfect gecorreleerd met de prijs van het betreffende aandeel. Het is dus mogelijk om het risico van een portefeuille te beheren of zelfs te elimineren.

Veronderstel nu dat een stochastische variabele y over de tijd een Ito proces volgt zoals in onderdeel 3.3 is geformuleerd. De stochastische variabele y volgt dan het volgende proces over de tijd:

$$(16) \quad dy = \mathbf{m}(y, t)dt + \mathbf{s}(y, t)dx$$

Met behulp van *Ito's lemma* [5] kan bewezen worden dat een willekeurige functie z van y en t het volgende proces over de tijd volgt:

$$(17) \quad dz = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{m} + \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \mathbf{s}^2 \right) dt + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{s} dx$$

Blijkbaar volgt de stochastische variabele z eveneens een Ito proces over de tijd, waarbij:

$$(18) \quad \mathbf{m}(y, t) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{m} + \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \mathbf{s}^2 \right)$$

en

$$(19) \quad \mathbf{s}(y, t) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \mathbf{s}$$

In onderdeel 3.3 is het volgende model geformuleerd voor het proces dat het aandeel S over de tijd volgt:

$$(20) \quad \Delta S = \mathbf{m}S\Delta t + \mathbf{s}S\mathbf{e}\sqrt{\Delta t}$$

Veronderstel nu dat de stochastische variabele f de prijs is van een derivaat van het aandeel S . De stochastische variabele f moet een functie zijn van S en t . Op basis van Ito's lemma kan gesteld worden dat de stochastische variabele f het volgende proces over de tijd volgt:

$$(21) \quad \Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mathbf{m}S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \mathbf{s}S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \mathbf{s}S \Delta x$$

Het aandeel S en het derivaat f zijn onderliggend aan dezelfde bron van risico: het Wiener proces dx . Het is dus mogelijk om een portefeuille zodanig samen te stellen dat het Wiener proces geëlimineerd kan worden. De samenstelling van deze portefeuille Π is dan als volgt:

$$(22) \quad \Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

De houder van deze portefeuille heeft dus in *long* [1] positie in aandeel S en een *short* [1] positie in derivaat f . De portefeuille Π volgt dan het volgende proces over de tijd:

$$(23) \quad \Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

Door vergelijking (20) en (21) te substitueren in vergelijking (23), volgt:

$$(24) \quad \Delta \Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \mathbf{s}^2 S^2 \right) \Delta t$$

Gedurende tijdsperiode Δt is het Wiener proces dx geëlimineerd uit portefeuille Π . De portefeuille Π is dus risicovrij gedurende de tijdsperiode Δt . In het verlengde van de EMH kan gesteld worden dat het rendement van portefeuille Π over tijdsperiode Δt gelijk is aan de risicovrije rente r :

$$(25) \quad \Delta \Pi = r\Pi\Delta t$$

Door vergelijking (23) en (24) te substitueren in vergelijking (25), volgt:

$$(26) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \mathbf{s}^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

hieruit volgt de volgende vergelijking;

$$(27) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Deze vergelijking staat wel bekend als de *Black-Scholes-Merton* [5] differentiaal vergelijking. Er bestaan vele oplossingen voor deze vergelijking. De oplossing voor een specifiek derivaat is afhankelijk van de randvoorwaarden die gebruikt worden.

De meest simpele verschijningsvormen van opties zijn *European call* [5] en *-put* [5] opties. Een European call optie geeft het recht om op tijdstip T een aandeel S tegen een van tevoren vastgestelde waarde X te kopen. Een European put optie het recht om te verkopen. De randvoorwaarde voor een European call optie is derhalve:

$$(28) \quad f = \max(S - X, 0), \text{ waarbij } t = T$$

De randvoorwaarde voor een European put optie is:

$$(29) \quad f = \max(X - S, 0), \text{ waarbij } t = T$$

De oplossing van de Black-Scholes-Merton differentiaal vergelijking voor de randvoorwaarden van European call optie c en de European put optie p zijn:

$$(30) \quad c = S_1 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

en

$$(31) \quad p = X e^{-rT} N(-d_2) - S_1 N(-d_1)$$

waarbij:

$$(32) \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r + \mathbf{s}^2/2)T}{\mathbf{s}\sqrt{T}}$$

en

$$(33) \quad d_2 = \frac{\ln(S_0/X) + (r - \mathbf{s}^2/2)T}{\mathbf{s}\sqrt{T}} = d_1 - \mathbf{s}\sqrt{T}$$

Hierbij staat $N(x)$ voor de cumulatieve kansverdeling van een normaal verdeelde stochastische variabele met een verwachtingwaarde 0 en een standaarddeviatie 1.

4.2 Hedging

Veronderstel nu dat het vanuit het oogpunt van financieel risicobeheer wenselijk is voor een bepaalde onderneming om een European call optie c te schrijven op een bepaalde hoeveelheid aandelen S . Hiertoe moet de onderneming op ieder tijdstip de volgende portefeuille Π aanhouden:

$$(34) \quad \Pi = -c + \frac{dc}{dS} S$$

Uit vergelijking (30) kan afgeleid worden dat voor een European call optie geldt dat:

$$(35) \quad \frac{dc}{dS} = N(d_1)$$

In tabel 1 is een simulatie weergegeven van het beheer van een dergelijke portefeuille.

day	S	delta	shares purchased	costs of shares purchased	cumulative costs incl. Interest	interest costs
0	€ 100,00	0,26	26	€ 2.576,14	€ 2.576,14	€ 0,52
1	€ 96,83	0,18	-8	€ 784,89-	€ 1.791,76	€ 0,16-
2	€ 99,91	0,24	7	€ 671,41	€ 2.463,02	€ 0,13
3	€ 99,64	0,23	-1	€ 132,01-	€ 2.331,15	€ 0,03-
4	€ 96,45	0,15	-8	€ 784,48-	€ 1.546,64	€ 0,16-
5	€ 95,43	0,12	-3	€ 257,79-	€ 1.288,70	€ 0,05-
6	€ 96,26	0,13	1	€ 88,50	€ 1.377,15	€ 0,02
7	€ 94,44	0,09	-4	€ 379,18-	€ 997,99	€ 0,08-
8	€ 95,27	0,10	1	€ 63,18	€ 1.061,10	€ 0,01
9	€ 96,16	0,11	1	€ 81,90	€ 1.143,01	€ 0,02
10	€ 97,85	0,13	3	€ 255,13	€ 1.398,16	€ 0,05
11	€ 95,26	0,07	-6	€ 551,77-	€ 846,44	€ 0,11-
12	€ 97,28	0,10	3	€ 263,20	€ 1.109,53	€ 0,05
13	€ 99,21	0,13	3	€ 324,13	€ 1.433,71	€ 0,06
14	€ 101,21	0,18	4	€ 440,09	€ 1.873,86	€ 0,09
15	€ 103,39	0,24	6	€ 633,88	€ 2.507,84	€ 0,13
16	€ 101,36	0,15	-8	€ 852,71-	€ 1.655,26	€ 0,17-
17	€ 101,11	0,13	-2	€ 237,81-	€ 1.417,28	€ 0,05-
18	€ 97,06	0,03	-10	€ 937,47-	€ 479,77	€ 0,19-
19	€ 94,32	0,01	-3	€ 257,15-	€ 222,43	€ 0,05-
20	€ 94,30	0,00	0	€ 35,83-	€ 186,54	€ 0,01-
21	€ 94,85	0,00	0	€ 16,93-	€ 169,60	€ 0,00-
22	€ 92,40	0,00	0	€ 17,56-	€ 152,04	€ 0,00-
23	€ 88,99	0,00	0	€ 0,36-	€ 151,68	€ 0,00-
24	€ 88,30	0,00	0	€ 0,00-	€ 151,68	€ 0,00-
25	€ 88,93	0,00	0	€ -	€ 151,68	
STRIKE	€ 110,00		0	€ 0,00-	€ 151,68	

tabel 1: hedge-simulatie (out-the-money)

In dit voorbeeld wil de onderneming een European call optie creëren met een looptijd van 25 dagen. Deze optie heeft een uitoefenwaarde van ?110 en heeft betrekking op 100 aandelen. De risicovrije rente is bekend en bedraagt 0,05 per jaar. De volatiliteit is eveneens bekend en bedraagt 0,40 per jaar.

Allereerst wordt het koersverloop van het aandeel S gesimuleerd op basis van vergelijking (20). Vervolgens wordt per dag de afgeleide $\Delta = N(d_1)$ berekend. Op basis van deze afgeleide wordt eveneens per dag bepaald hoeveel aandelen de onderneming in portefeuille moet hebben en dus hoeveel aandelen gekocht of verkocht worden. Tenslotte worden de transactie- en de interest kosten bepaald, die voortvloeien uit deze aan- en verkopen. De totale kosten van deze hedge-simulatie bedragen ?151,68.

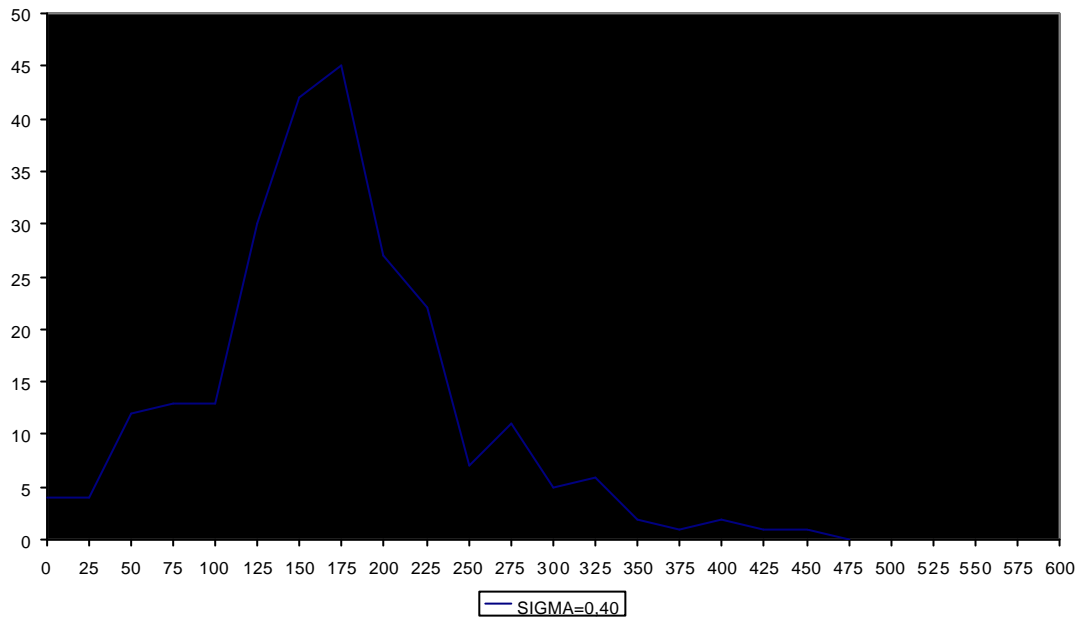
Aan het einde van de looptijd kan de optie *out-the-money* [5] of *in-the-money* [5] eindigen. Als de optie *out-the-money* eindigt, zoals bij de simulatie in tabel 1, vervalt de optie. Indien de optie echter *in-the-money* eindigt moet de onderneming haar verplichting nakomen en de aandelen tegen de vastgestelde uitoefenwaarde leveren. In tabel 2 is een simulatie weergegeven waarbij de optie *in-the-money* eindigt.

day	S	delta	shares purchased	costs of shares purchased	cumulative costs incl. Interest	interest costs
0	€ 100,00	0,26	26	€ 2.576,14	€ 2.576,14	€ 0,52
1	€ 100,64	0,27	1	€ 111,29	€ 2.687,95	€ 0,02
2	€ 102,32	0,31	4	€ 416,45	€ 3.104,42	€ 0,08
3	€ 100,82	0,26	-5	€ 481,40-	€ 2.623,10	€ 0,10-
4	€ 101,95	0,29	3	€ 262,99	€ 2.885,99	€ 0,05
5	€ 99,58	0,22	-7	€ 717,90-	€ 2.168,14	€ 0,14-
6	€ 97,56	0,16	-6	€ 550,08-	€ 1.617,92	€ 0,11-
7	€ 96,32	0,12	-3	€ 327,08-	€ 1.290,73	€ 0,07-
8	€ 93,44	0,07	-6	€ 517,74-	€ 772,92	€ 0,10-
9	€ 96,87	0,12	5	€ 489,77	€ 1.262,59	€ 0,10
10	€ 98,84	0,16	4	€ 351,32	€ 1.614,01	€ 0,07
11	€ 99,06	0,15	0	€ 41,99-	€ 1.572,09	€ 0,01-
12	€ 102,98	0,26	11	€ 1.100,48	€ 2.672,57	€ 0,22
13	€ 102,89	0,24	-1	€ 139,55-	€ 2.533,24	€ 0,03-
14	€ 104,39	0,29	4	€ 463,06	€ 2.996,27	€ 0,09
15	€ 104,73	0,29	0	€ 27,54	€ 3.023,90	€ 0,01
16	€ 110,29	0,54	25	€ 2.720,71	€ 5.744,62	€ 0,54
17	€ 113,11	0,67	13	€ 1.519,46	€ 7.264,62	€ 0,30
18	€ 114,14	0,73	5	€ 627,50	€ 7.892,43	€ 0,13
19	€ 112,89	0,68	-5	€ 535,79-	€ 7.356,76	€ 0,11-
20	€ 117,11	0,88	20	€ 2.288,04	€ 9.644,69	€ 0,46
21	€ 119,72	0,96	8	€ 971,82	€ 10.616,97	€ 0,19
22	€ 121,05	0,99	3	€ 363,29	€ 10.980,45	€ 0,07
23	€ 124,60	1,00	1	€ 161,44	€ 11.141,96	€ 0,03
24	€ 119,72	1,00	0	€ 1,85-	€ 11.140,14	€ 0,00-
25	€ 117,19	1,00	0	€ 4,43	€ 11.144,57	
STRIKE	€ 110,00		-100	€ 11.000,00-	€ 144,57	

tabel 2: hedge-simulatie (*in-the-money*)

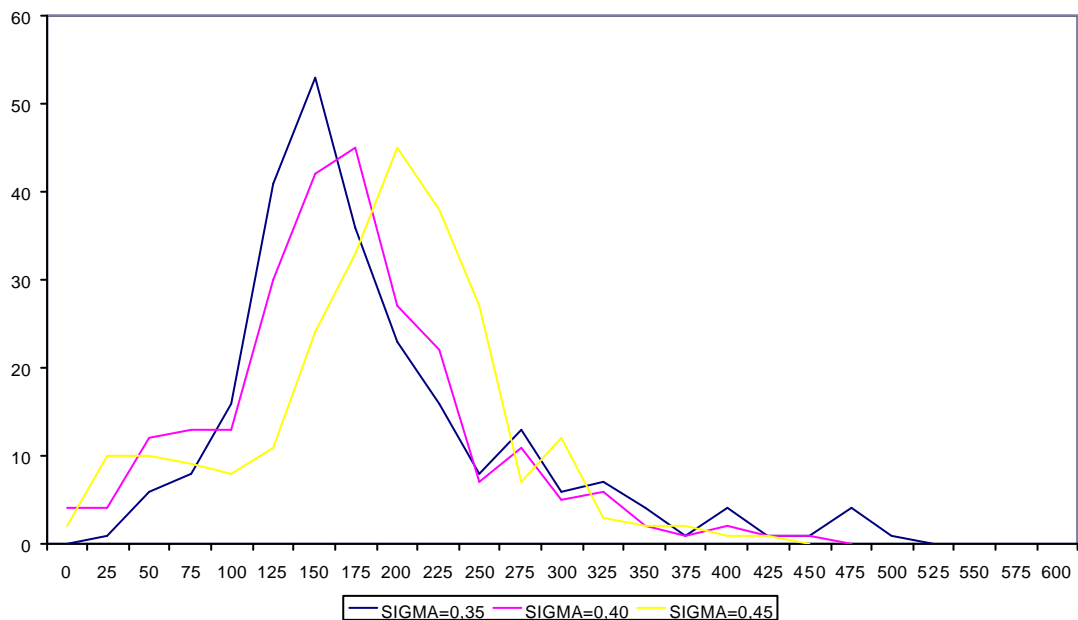
De totale kosten van deze hedge-simulatie bedragen ?144,57. Deze kosten zijn het gemiddelde resultaat van de aan- en verkoop van de onderliggende aandelen. De theoretische verwachtingswaarde van de European call optie uit dit voorbeeld is ?160. Bij beide simulaties zijn de kosten hieraan echter ongelijk. De onzekerheid omtrent de theoretische verwachtingswaarde wordt onder andere veroorzaakt omdat de portefeuille slechts per dag gebalanceerd wordt. Naarmate de portefeuille frequenter gebalanceerd wordt, convergeert de verwachtingswaarde van de European call optie naar de theoretische waarde.

In figuur 1 zijn de uitkomsten van een 1000-tal van deze hedge-simulaties weergegeven in een histogram. Hierbij zijn de totale kosten weergegeven op de x-as en is de frequentie weergegeven op de y-as. Uit deze figuur valt de onzekerheid omtrent de theoretische waarde van de optie duidelijk waar te nemen.



figuur 1: uitkomsten hedge-simulaties

In figuur 2 zijn de uitkomsten van een drietal experimenten weergegeven. Hierbij bestaat ieder experiment uit een 1000-tal hedge simulaties. Ieder experiment maakt echter gebruik van een andere schatting van de volatiliteit.



figuur 2: uitkomsten hedge-simulaties met verschillende schattingen van volatiliteit

Allereerst is het experiment uit figuur 1 weergegeven. Hierbij is uitgegaan van de correcte waarde van de volatiliteit. Deze bedraagt 0,40. Het tweede experiment onderschat de grootte van de volatiliteit en schat deze op 0,35 terwijl ze 0,40 bedraagt. De kansverdeling van dit experiment is links-scheef en heeft een dikke rechter staart. De scheefheid naar links wordt veroorzaakt door het systematisch onderschatten van het risico. Dit leidt tot een te lage mate van indekking. Indien de optie nu out-the-money eindigt en er dus niet geleverd hoeft te worden zijn geringe indekkosten gemaakt. Echter, indien de optie in-the-money eindigt, is de onderneming niet volledig ingedekt en zullen hoge kosten gemaakt moeten worden om de verplichtingen na te kunnen komen. Dit veroorzaakt de dikke rechter staart. Het derde experiment overschat het risico en schat deze op 0,45 terwijl ze 0,40 bedraagt. De kansverdeling van dit experiment is rechts-scheef en heeft een slanke rechter staart. De scheefheid naar rechts wordt veroorzaakt door het systematisch overschatten van het risico. Dit leidt tot een te hoge mate van indekking. Indien de optie nu out-the-money eindigt en er dus niet geleverd hoeft te worden zijn te hoge indekkosten gemaakt. Echter, indien de optie in-the-money eindigt is de onderneming meer dan volledig ingedekt. Dit veroorzaakt de slanke rechter staart.

In tabel 3 zijn de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de drie verschillende hedge-experimenten weergegeven.

sigma	average	stdev
0,35	€ 197,28	€ 87,31
0,40	€ 179,99	€ 80,40
0,45	€ 195,01	€ 84,23

tabel 3: verwachtingswaarde en spreiding totale kosten hedge-experimenten

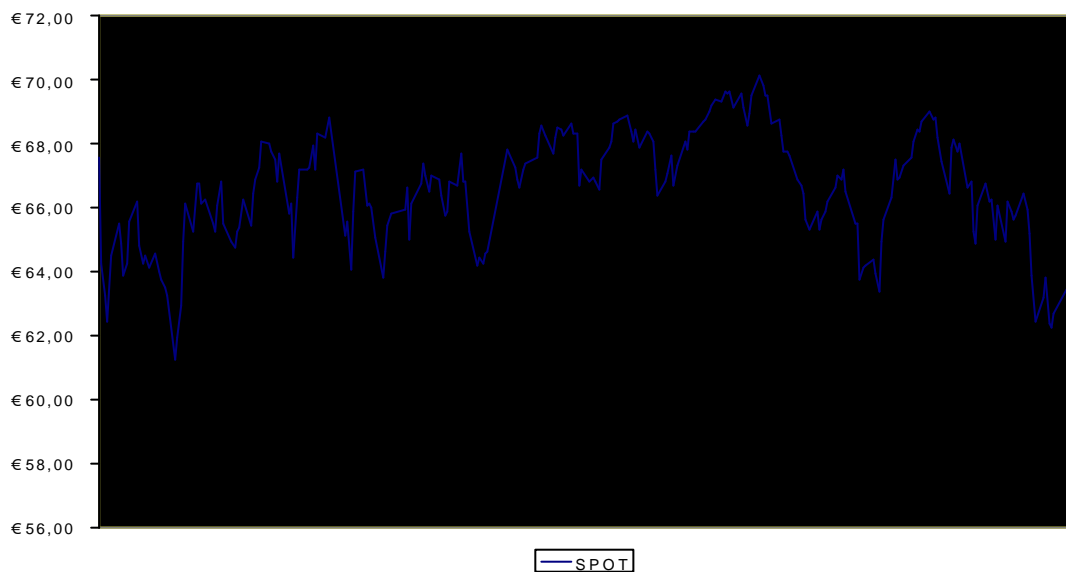
Uit deze waarden blijkt dat de verwachte kosten van de experimenten, waarbij een incorrecte schatting gemaakt is van de volatiliteit, aanzienlijk hoger zijn. Bovendien is de spreiding rond deze verwachtingswaarde hoger. Een nauwkeurige schatting van volatiliteit is blijkbaar essentieel voor een gedegen analyse en beheer van financieel risico.

5. Modellen volatiliteit en rekenmethoden

In het kader van financieel risicobeheer is het essentieel om een goede schatting te kunnen maken van het verloop van de volatiliteit van aandelen over de tijd. In dit onderdeel zullen populaire modellen en rekenmethoden hiertoe beschreven worden.

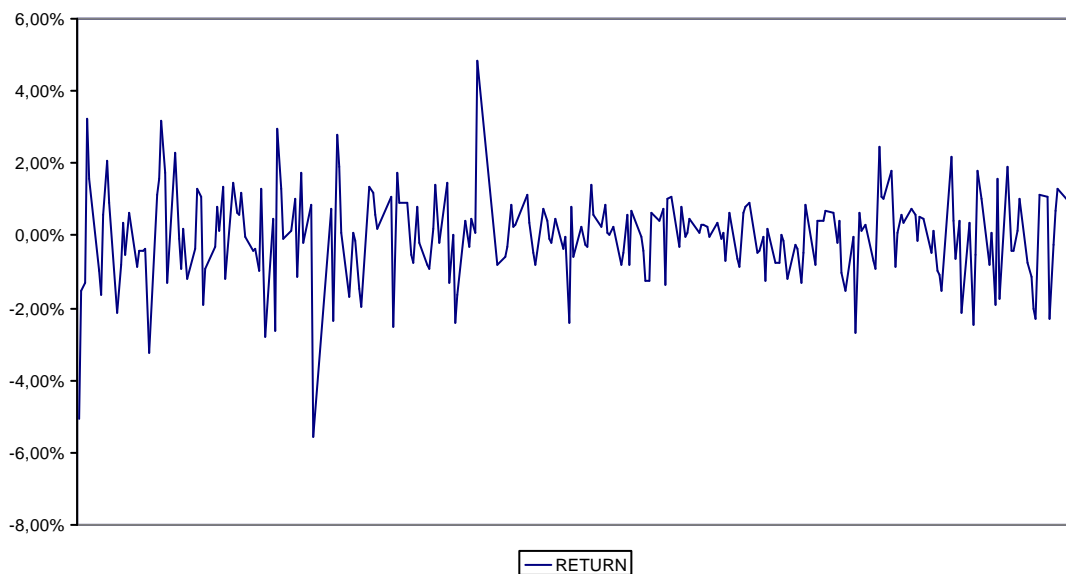
5.1 ARCH, GARCH(x,y) en EWMA

In figuur 3 is het verloop van de slotkoers van de AEX-index weergegeven over het jaar 2000.



figuur 3: koersverloop AEX-index over jaar 2000

De dagrendementen zijn in figuur 4 weergegeven over de tijd.



figuur 4: dagrendementen AEX-index over jaar 2000

Op basis van het verloop $S = \{S_1, S_2, \dots, S_T\}$ is het samengestelde dagrendement u_t op tijdstip t als volgt berekend:

$$(36) \quad u_t = \ln(S_t/S_{t-1})$$

Uit figuur 4 blijkt dat volatiliteit over de tijd varieert. Een naïeve methode om de volatiliteit op een willekeurig tijdstip te schatten, is door de laatste n geobserveerde rendementen u_i in beschouwing te nemen en te veronderstellen dat deze allemaal afkomstig zijn uit dezelfde normale verdeling. De verwachtingswaarde m van deze verdeling op tijdstip t kan dan als volgt geschat worden:

$$(37) \quad m_t = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}$$

De variantie s^2 , een maatstaf voor volatiliteit, van deze verdeling op tijdstip t kan dan als volgt geschat worden:

$$(38) \quad s_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2 - nm_t^2}{n-1}$$

Omdat de verwachtingswaarde m van het rendementgenererende proces van aandelen over een korte tijdsperiode, zoals een dag, vrijwel gelijk is aan nul kan deze buiten beschouwing worden gelaten en kan vergelijking (38) herschreven worden tot:

$$(39) \quad s_t^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-1} u_i^2$$

Deze naïeve methode kent aan iedere observatie een gelijk gewicht toe in de veronderstelling dat alle observaties afkomstig zijn uit dezelfde verdeling. Nu kan gesteld worden dat het waarschijnlijker is dat een observatie afkomstig is uit dezelfde verdeling naarmate deze recenter heeft plaatsgevonden. In het verlengde van deze gedachtegang kan een klasse modellen voor volatiliteit geformuleerd worden, die een groter gewicht toekent aan observaties naarmate deze recenter hebben plaatsgevonden:

$$(40) \quad s_t^2 = \sum_{i=1}^n a_i u_i^2$$

De variabele a_i kent hierbij een positief gewicht toe aan rendement u_i . Omdat een groter gewicht wordt toegekend aan observaties naarmate deze recenter hebben plaatsgevonden, geldt: $a_i > a_j$ als $i > j$.

Bovendien moet aan de volgende voorwaarde worden voldaan:

$$(41) \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = 1$$

Een model dat gebaseerd is op deze gedachtegang is het zogenaamde *ARCH* [5] model. Dit model kent daarnaast nog een gewicht toe aan de lange termijn gemiddelde volatiliteit V . Namelijk; hoewel volatiliteit een toevalsverloop vertoont, blijkt empirisch dat ze naar een soort lange termijn gemiddelde neigt. Dit verschijnsel staat wel bekend als *mean reversion* [5].

Het geheel kan als volgt geformuleerd worden:

$$(42) \quad \mathbf{s}_t^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i u_i^2 + \mathbf{g}V$$

Hierbij geldt dat:

$$(43) \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i + \mathbf{g} = 1$$

Een bijzondere vorm van het ARCH model is het zogenaamde *GARCH(1,1)* [5] model. Hierbij neemt het gewicht dat aan een observatie wordt toegekend exponentieel af in de tijd zodat $\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{b}\mathbf{a}_i$, waarbij \mathbf{b} een constante is tussen 0 en 1:

$$(44) \quad \mathbf{s}_t^2 = \mathbf{a}u_{t-1}^2 + \mathbf{b}\mathbf{s}_{t-1}^2 + \mathbf{g}V$$

Hierbij geldt dat:

$$(45) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{g} = 1$$

Hierdoor kan vergelijking x herschreven worden tot:

$$(46) \quad \mathbf{s}_t^2 = \mathbf{a}u_{t-1}^2 + \mathbf{b}\mathbf{s}_{t-1}^2 + (1 - \mathbf{a} - \mathbf{b})V$$

Het algemenere *GARCH(x,y)* [5] model neemt de laatste x rendementen en de laatste y geschatte waarden van de variantie in beschouwing om de huidige variantie te schatten. Het *GARCH(1,1)* model is de meest populaire vorm van *GARCH(x,y)*.

Een eenvoudiger model dat de lange termijn gemiddelde volatiliteit buiten beschouwing laat is het zogenaamde *EWMA* [5] model. Bij dit model neemt het gewicht dat aan een observatie wordt toegekend eveneens exponentieel af in de tijd:

$$(47) \quad \mathbf{s}_t^2 = (1 - \mathbf{I})u_{t-1}^2 + \mathbf{I}\mathbf{s}_{t-1}^2$$

Hierbij is I een waarde tussen 0 en 1. Het EWMA model is dus eigenlijk een bijzondere vorm van het GARCH(1,1) model, waarbij $\mathbf{a} = (1 - I)$, $\mathbf{b} = I$ en $\mathbf{g} = 0$. Soms is het GARCH(x,y) model niet stabiel en wordt een negatieve waarde toegekend aan \mathbf{g} omdat $\mathbf{a} + \mathbf{b} > 1$. In een dergelijke situatie kan beter gebruik gemaakt worden van het EWMA model.

5.2 Maximum likelihood methode

De parameters van deze modellen kunnen geschat worden met de *maximum likelihood* [5] methode. Bij deze methode worden de waarden voor de parameters zodanig gekozen dat de kans op de reeks geobserveerde rendementen maximaal is. De kans op een reeks van T normaal verdeelde observaties met een verwachtingswaarde 0 en een over de tijd variërende variantie \mathbf{s}_t^2 kan berekend worden met behulp van de volgende kansdichtheidfunctie:

$$(48) \quad \prod_{t=1}^T \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbf{s}_t^2}} \exp\left(\frac{-u_t^2}{2\mathbf{s}_t^2}\right) \right]$$

Het maximaliseren van een vergelijking is equivalent aan het maximaliseren van het logaritme van deze vergelijking. Door het logaritme van vergelijking x te maximaliseren kunnen constante vermenigvuldigingsfactoren buiten beschouwing gelaten worden:

$$(49) \quad \sum_{t=1}^T \left[-\ln(\mathbf{s}_t^2) - \frac{u_t^2}{\mathbf{s}_t^2} \right]$$

Nu zal het GARCH(1,1) model worden toegepast op de volatiliteit van de AEX-index over het jaar 2000.

In dit experiment komt de variantie \mathbf{s}_t^2 per tijdstip volgens vergelijking (46) tot stand. De parameters \mathbf{a} en \mathbf{b} worden door een iteratief algoritme zodanig gekozen dat vergelijking x gemaximaliseerd wordt. In dit optimum geldt dan: $\mathbf{a} = 0,071691$, $\mathbf{b} = 0,921007$, $\mathbf{g} = 0,007302$ en $V = 0,000227$. De maximum likelihood waarde bedraagt in dit optimum 1942,18. Op dezelfde wijze kan het EWMA model toegepast worden. Per tijdstip komt de variantie \mathbf{s}_t^2 volgens vergelijking (47) tot stand. In het optimum geldt dan: $I = 0,928792$. De maximum likelihood waarde in dit optimum bedraagt 1939,08.

In tabel 4 wordt de toepassing van het GARCH(1,1) model op de volatiliteit van de AEX-index over het jaar 2000 weergegeven.

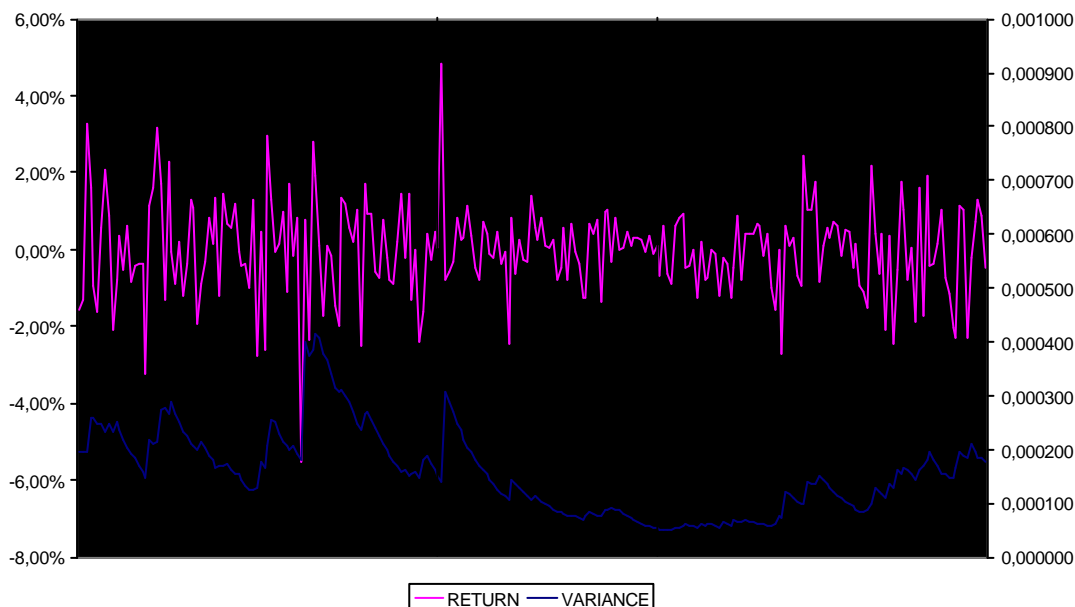
alpha	beta	gamma	V	likelijkheid
0,071691	0,921007	0,007302	0,000227	1942,18

date	spot	relative	return	variance	likelijkheid
01-03-00	€67,54				
01-04-00	€64,22	95,08%	-5,04%		
01-05-00	€63,23	98,46%	-1,55%	0,000202	7,31
01-06-00	€62,42	98,72%	-1,29%	0,000206	7,68
01-07-00	€64,48	103,30%	3,25%	0,000204	3,32
01-10-00	€65,51	101,60%	1,58%	0,000272	7,29
01-11-00	€64,89	99,05%	-0,95%	0,000259	7,91
01-12-00	€63,84	98,38%	-1,63%	0,000246	7,23
01-13-00	€64,22	100,60%	0,59%	0,000248	8,16
01-14-00	€65,56	102,09%	2,07%	0,000231	6,53
...
...
12-14-00	€63,89	98,01%	-2,01%	0,000146	6,05
12-15-00	€62,44	97,73%	-2,30%	0,000166	5,53
12-18-00	€63,16	101,15%	1,15%	0,000194	7,87
12-19-00	€63,83	101,06%	1,06%	0,000189	7,98
12-20-00	€62,38	97,73%	-2,30%	0,000184	5,73
12-21-00	€62,24	99,78%	-0,22%	0,000210	8,44
12-22-00	€62,68	100,71%	0,70%	0,000195	8,29
12-27-00	€63,51	101,32%	1,32%	0,000184	7,66
12-28-00	€64,07	100,88%	0,88%	0,000183	8,18
12-29-00	€63,76	99,52%	-0,49%	0,000176	8,51

1942,18

tabel 4: volatiliteit AEX-index over jaar 2000 [GARCH(1,1)]

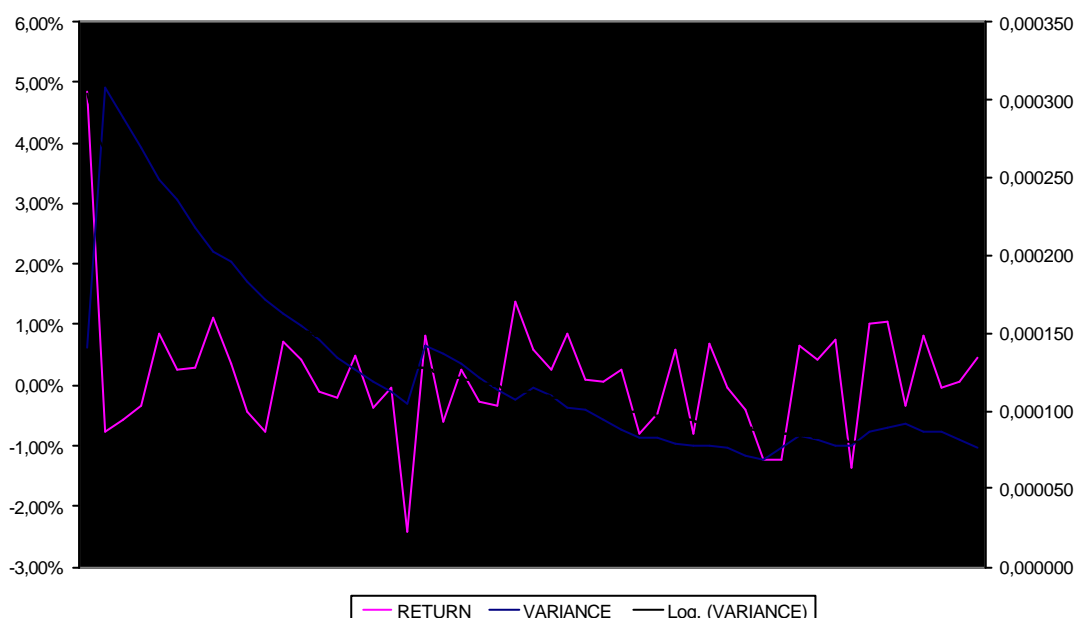
In figuur 5 zijn de dagrendementen van de AEX-index over het jaar 2000 en het verloop van de door GARCH(1,1) geschatte volatiliteit weergegeven.



figuur 5: dagrendementen AEX-index over jaar 2000 met volatiliteit[GARCH(1,1)]

De klasse van modellen, die in dit hoofdstuk behandeld is, schat het verloop van volatiliteit over de tijd door middel van een autoregressieve vergelijking. Hierdoor wordt het adaptievermogen van het model echter beperkt. Immers, de schatting van volatiliteit op een willekeurig tijdstip neigt naar de trend uit het verleden. Indien sprake is van een trendbreuk, is de schatting van volatiliteit gedurende een korte periode na deze breuk onzuiver. Dit verschijnsel blijkt ook uit figuur 5: indien de volatiliteit over een bepaalde tijdsperiode relatief hoog en vervolgens relatief laag is, wordt gedurende een korte periode na de trendbreuk het merendeel van de gewichten toegekend aan observaties uit een verdeling met een hoge volatiliteit. Hierdoor is de schatting van de volatiliteit gedurende deze periode te hoog. Naarmate meer observaties afkomstig zijn uit een verdeling met een lage volatiliteit convergeert de schatting naar een verdeling met een lage volatiliteit. Door een groter gewicht toe te kennen aan recentere observaties wordt deze convergentie versneld. Hoe dan ook, gedurende een korte periode na een trendbreuk is de in dit hoofdstuk behandelde klasse van modellen niet in staat om een zuivere schatting te maken van volatiliteit.

In figuur 6 is een specifieke tijdsperiode uit figuur 5 weergegeven tezamen met een trendlijn om de convergentie van het GARCH(1,1) model weer te geven.



figuur 6: dagrendementen AEX-index over bepaalde periode jaar 2000 met volatiliteit[GARCH(1,1)]

Uit deze figuur blijkt dat gedurende een korte periode na de trendbreuk het merendeel van de gewichten toegekend wordt aan observaties uit een verdeling met een hoge volatiliteit. Hierdoor is de schatting van de volatiliteit gedurende deze periode te hoog.

6. Uitbreiding model rendementgenererende proces en rekenmethoden

De in het voorgaande hoofdstuk behandelde ARCH modellen zijn blijkbaar niet in staat om kort na een trendbreuk een zuivere schatting te maken van het verloop van de volatiliteit van aandelen. In dit hoofdstuk zal een alternatief model geïntroduceerd worden. De formulering van het model en de erbij behorende rekenmethoden, die in dit hoofdstuk behandeld zullen worden, zijn ontleend aan een handleiding, die is geschreven door Lawrence Rabiner.

6.1 Verborgene Markov proces

Het basale model beschouwt rendementen van aandelen als trekkingen uit een normale verdeling. De status s_i van het rendementgenererende proces wordt derhalve op ieder tijdstip gekarakteriseerd door een verwachtingswaarde \mathbf{m}_i en een standaarddeviatie \mathbf{s}_i :

$$(50) \quad s_i = \{\mathbf{m}_i, \mathbf{s}_i\}$$

De status van het rendementgenererende proces op tijdstip t wordt genoteerd als q_t . Door het vrijkomen van informatie op willekeurige tijdstippen kunnen de parameters over de tijd veranderen. Het rendementgenererende proces kan daardoor over een bepaalde tijdsperiode in meerdere statussen s verkeren:

$$(51) \quad s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Het veranderen van de status van het rendementgenererende proces kan eveneens beschouwd worden als een stochastisch proces. In het verlengde van de EMH kan gesteld worden dat dit een Markov proces is: indien een patroon ontdekt zou worden in het veranderen van de status van het rendementgenererende proces waarmee risicovrije winst behaald zou kunnen worden, zou de vraag naar het betreffende aandeel direct stijgen. Dit leidt direct tot een prijsstijging, zodat geen risicovrije winst meer behaald kan worden en het patroon teniet wordt gedaan. Omdat dit onderliggende proces niet fysiek waarneembaar is, wordt het een *verborgene Markov proces* [6] genoemd. Dit verborgene Markov proces wordt gemodelleerd door $a = \{a_{ij}\}$, waarbij a_{ij} als volgt gedefinieerd wordt:

$$(52) \quad a_{ij} = P(q_{t+1} = s_j \mid q_t = s_i) \text{ en } 1 \leq i, j \leq n$$

Het rendementgenererende proces wordt gemodelleerd door $b = \{b_i(u_t)\}$, waarbij $b_i(u_t)$ als volgt gedefinieerd wordt:

$$(53) \quad b_i(u_t) = P(u_t \mid q_t = s_i) \text{ en } 1 \leq i \leq n$$

Deze kans kan geschat worden met vergelijking (1).

De initiële status van het rendementgenererende proces wordt gemodelleerd door $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_i\}$, waarbij \mathbf{p}_i als volgt gedefinieerd wordt:

$$(54) \quad \mathbf{p}_i = P(q_1 = s_i) \text{ en } 1 \leq i \leq n$$

Het gehele model wordt als volgt genoteerd:

$$(55) \quad \mathbf{I} = \{a, b, \mathbf{p}\}$$

6.2 Forward-backward methode

Beschouw nu een reeks geobserveerde rendementen $u = \{u_1, u_2, \dots, u_T\}$ en veronderstel dat de parameters \mathbf{I} van het uitgebreide model bekend zijn. De kans dat het rendementgenererende proces op tijdstip t in status s_i verkeert, kan op meerdere manieren gedefinieerd worden. Een mogelijke definitie is de volgende:

$$(56) \quad P(q_t = s_i | u, \mathbf{I})$$

De meest waarschijnlijke status \bar{q}_t op tijdstip t kan nu als volgt geschat worden:

$$(57) \quad \bar{q}_t = s_i, \text{ waarbij } i = \arg \max_{1 \leq i \leq n} [P(q_t = s_i | u, \mathbf{I})]$$

Vergelijking (56) kan met de *forward-backward* [6] methode berekend worden. Hiertoe wordt deze vergelijking als volgt herschreven:

$$(58) \quad P(q_t = s_i | u, \mathbf{I}) = \frac{P(q_t = s_i, u | \mathbf{I})}{P(u, \mathbf{I})}$$

De noemer van deze vergelijking kan als volgt herschreven worden:

$$(59) \quad P(u, \mathbf{I}) = \sum_{i=1}^n P(q_t = s_i, u | \mathbf{I})$$

Beschouw nu de *forward* [6] variabele $\mathbf{a}_t(i)$:

$$(60) \quad \mathbf{a}_t(i) = P(u_1, u_2, \dots, u_t, q_t = s_i | \mathbf{I})$$

en de *backward* [6] variabele $\mathbf{b}_t(i)$:

$$(61) \quad \mathbf{b}_t(i) = P(u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_T | q_t = s_i, \mathbf{I})$$

De teller van vergelijking (58) kan als volgt herschreven worden:

$$(62) \quad P(q_t = s_i, u | \mathbf{I}) = \mathbf{a}_t(i) \mathbf{b}_t(i)$$

Vergelijking (58) kan als geheel dus als volgt herschreven worden:

$$(63) \quad P(q_t = s_i | u, \mathbf{I}) = \frac{\mathbf{a}_t(i) \mathbf{b}_t(i)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_t(i) \mathbf{b}_t(i)}$$

Omdat geldt:

$$(64) \quad \mathbf{a}_1(i) = \mathbf{p}_i b_i(u_0)$$

Kan $\mathbf{a}_t(i)$ recursief berekend worden:

$$(65) \quad \mathbf{a}_t(i) = \left[\sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{t-1}(j) a_{ji} \right] b_i(u_t)$$

Omdat ook geldt:

$$(66) \quad \mathbf{b}_T(i) = 1$$

Kan $\mathbf{b}_t(i)$ eveneens recursief berekend worden:

$$(67) \quad \mathbf{b}_t(i) = \sum_{j=0}^n a_{ij} b_j(u_t) \mathbf{b}_{t+1}(i)$$

6.3 Viterbi methode

Met behulp van de forward-backward methode kan geschat worden wat de meest waarschijnlijke, individuele status op een bepaald tijdstip is. Het is echter nauwkeuriger om dit te doen aan de hand van de kans op de gehele statussequentie. Deze kans kan als volgt gedefinieerd worden:

$$(68) \quad P(q_1, q_2, \dots, q_T | u, \mathbf{I})$$

Het maximaliseren van deze kans is equivalent aan het maximaliseren van de volgende kans:

$$(69) \quad P(q_1, q_2, \dots, q_T, u | \mathbf{I})$$

De sequentie van statussen, die deze kans maximaliseert, kan berekend worden met de *Viterbi* [6] methode. Hiertoe wordt de volgende kans gedefinieerd:

$$(70) \quad \mathbf{g}_t(i) = \max_{q_1, q_2, \dots, q_{t-1}} [q_1, q_2, \dots, q_t = s_i, u_1, u_2, \dots, u_t | \mathbf{I}]$$

Omdat geldt:

$$(71) \quad \mathbf{g}_1(i) = \mathbf{p}_i b_i(u_1)$$

kan $\mathbf{g}_t(i)$ recursief geschat worden:

$$(72) \quad \mathbf{g}_t(i) = \max_{1 \leq j \leq n} [\mathbf{g}_{t-1}(j) a_{ji} b_i(u_t)]$$

Tijdens de recursie wordt door een tabel $\mathbf{d}_t(i)$ bijgehouden welk argument deze kans maximaliseert voor iedere waarde van t en i :

$$(73) \quad \mathbf{d}_t(i) = \arg \max_{1 \leq j \leq n} [\mathbf{g}_{t-1}(j) a_{ji}]$$

Omdat geldt:

$$(74) \quad \bar{q}_T = s_i, \text{ waarbij } i = \arg \max_{1 \leq j \leq n} [\mathbf{g}_T(j)]$$

Kan de meest waarschijnlijke sequentie van statussen recursief geschat worden:

$$(75) \quad \bar{q}_t = \mathbf{d}_{t+1}(\bar{q}_{t+1})$$

6.4 Baum-Welch methode

Indien de parameters van het uitgebreide model bekend zijn, is het mogelijk om het statusverloop van het rendementgenererende proces over de tijd te schatten met de hierboven beschreven rekenmethoden. Het schatten van deze parameters zelf is echter een zeer complex probleem. Er is geen analytische methode bekend om dit probleem op te lossen. Het is wel mogelijk om de modelparameters \mathbf{I} zodanig te kiezen dat de kans $P(u | \mathbf{I})$ lokaal gemaximaliseerd wordt. Hiertoe kan de *Baum-Welch* [6] methode gebruikt worden. Deze methode staat ook wel bekend als de *expectation-modification* [6] methode. Bij deze methode worden de modelparameters herschat op basis van een reeks observaties u en a-priori kennis over het model \mathbf{I} .

De schatting van de initiële status van het rendementgenererende proces $\bar{\mathbf{p}} = \{\bar{\mathbf{p}}_i\}$ wordt nu als volgt gedefinieerd:

$$(76) \quad \bar{\mathbf{p}}_i = P(q_1 = s_i | u, \mathbf{I})$$

Deze kans kan met de forward- en backward variabelen uit onderdeel 6.2 geschat worden:

$$(77) \quad P(q_1 = s_i | u, \mathbf{I}) = \frac{\mathbf{a}_1(i)\mathbf{b}_1(i)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_1(i)\mathbf{b}_1(i)}$$

De schatting van de statusveranderingen van het rendementgenererende proces $\bar{a} = \{\bar{a}_{ij}\}$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$(78) \quad \bar{a}_{ij} = \frac{P(q_t = s_i, q_{t+1} = s_j | u, \mathbf{I})}{P(q_t = s_i | u, \mathbf{I})}$$

De noemer van deze kans kan als volgt herschreven worden:

$$(79) \quad P(q_t = s_i, q_{t+1} = s_j | u, \mathbf{I}) = \frac{\mathbf{a}_t(i)a_{ij}b_j(u_t)\mathbf{b}_{t+1}(j)}{P(u, \mathbf{I})}$$

Zowel de noemer en de teller van vergelijking (79) kunnen nu met behulp van de forward- en backward variabelen uit onderdeel 6.2 berekend worden.

De kansverdeling $\bar{b} = \{\bar{b}_i(u_t)\}$ van het rendementgenererende proces wordt als volgt gedefinieerd:

$$(80) \quad \bar{b}_i(u_t) = P(u_t | q_t = s_i, u, \mathbf{I})$$

waarbij de parameters van status s_i als volgt geschat kunnen worden:

$$(81) \quad \bar{\mathbf{m}} = \frac{\sum_{t=1}^T P(q_t = s_i | u, \mathbf{I}) \cdot u_t}{\sum_{t=1}^T P(q_t = s_i | u, \mathbf{I})}$$

en

$$(82) \quad \bar{\mathbf{s}}_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^T P(q_t = s_i | u, \mathbf{I}) \cdot (u_t - \bar{\mathbf{m}})^2}{\sum_{t=1}^T P(q_t = s_i | u, \mathbf{I})}$$

Deze twee vergelijkingen kunnen eveneens met behulp van de forward- en backward variabelen uit onderdeel 6.2 berekend worden. Dit nieuwe model $\bar{\mathbf{I}}$ geeft een betere verklaring voor de reeks observaties dan het oorspronkelijke model \mathbf{I} in die zin dat $P(u | \bar{\mathbf{I}}) \geq P(u | \mathbf{I})$. Door de modelparameters op deze manier iteratief te herschatten, convergeert de schatting van het model naar de maximum likelihood schatter.

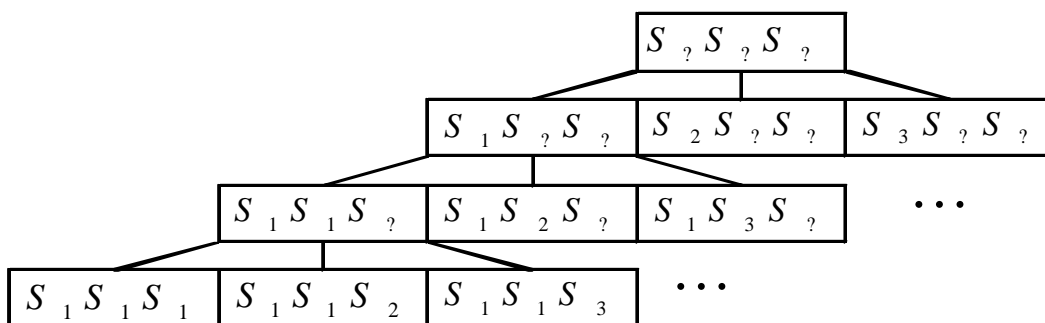
7. Alternatieve rekenmethode voor uitgebreid model

Het model uit voorgaand hoofdstuk beschouwt het verloop van de volatiliteit van aandelen over de tijd als onafhankelijk proces. Hierdoor zou dit model na een trendbreuk een betere schatting van de volatiliteit kunnen maken dan de ARCH modellen. Echter, de rekenmethode die in voorgaand hoofdstuk behandeld is om de parameters van het uitgebreide model te schatten, de Baum-Welch methode, behoeft vrij nauwkeurige a-priori kennis. Omdat over deze a-priori weinig zinvolle aannames gedaan kunnen worden, zal in dit hoofdstuk een rekenmethode geformuleerd worden die de parameters kan schatten, zonder dat hiertoe a-priori kennis nodig is.

7.1 n-GRID methode

Verondersteld wordt dat rendementen beschouwd kunnen worden als trekkingen uit een normale verdeling. Daarnaast is de status van het rendementgenererende proces $s_i = \{m, s_i\}$ variabel over de tijd. Over een bepaalde tijdsperiode kan het rendementgenererende proces dus meerdere statussen $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ doorlopen. De n-GRID methode neemt over een bepaalde tijdsperiode alle mogelijke statussequenties $q = \{q_1, q_2, \dots, q_T\}$ in beschouwing en schat per statussequentie de modelparameters \bar{I} op basis van een reeks observaties $u = \{u_1, u_2, \dots, u_T\}$. Vervolgens wordt voor de schatting van ieder mogelijk model \bar{I} de kans $P(u | \bar{I})$ berekend. Het model dat deze kans maximaliseert, is de maximum likelihood schatter voor de gegeven reeks.

In figuur 7 is in een boomdiagram weergegeven hoe alle mogelijke statussequenties over een drietal tijdstippen systematisch bepaald kunnen worden.



figuur 7: boomdiagram statussequenties over drietal tijdstippen

Er zijn een drietal verschillende observaties dus er kunnen maximaal drie verschillende statussen doorlopen worden. In dit boomdiagram worden alle combinaties van deze drie statussen bepaald.

Een reeks van een T -tal observaties kan maximaal T verschillende statussen doorlopen. In dit geval is iedere observatie te beschouwen als een trekking uit een andere verdeling. Het aantal statussequenties dat in beschouwing wordt genomen door de n-GRID methode is dan dus T^T . De complexiteit van het algoritme bedraagt dus in termen van *big-Oh* [7] notatie: $O(n) = n^n$. Dit is dus een zeer rekenintensieve methode.

In tabel 5 zijn alle statussequenties, die volgen uit het boomdiagram van figuur 7, weergegeven.

$S_1 S_1 S_1$	$S_1 S_1 S_2$	$S_1 S_1 S_3$
$S_1 S_2 S_1$	$S_1 S_2 S_2$	$S_1 S_2 S_3$
$S_1 S_3 S_1$	$S_1 S_3 S_2$	$S_1 S_3 S_3$
$S_2 S_1 S_1$	$S_2 S_1 S_2$	$S_2 S_1 S_3$
$S_2 S_2 S_1$	$S_2 S_2 S_2$	$S_2 S_2 S_3$
$S_2 S_3 S_1$	$S_2 S_3 S_2$	$S_2 S_3 S_3$
$S_3 S_1 S_1$	$S_3 S_1 S_2$	$S_3 S_1 S_3$
$S_3 S_2 S_1$	$S_3 S_2 S_2$	$S_3 S_2 S_3$
$S_3 S_3 S_1$	$S_3 S_3 S_2$	$S_3 S_3 S_3$

tabel 5: raster met alle mogelijke statussequenties over drie tijdstippen

Nu kan per statussequentie q het erbij horende model \bar{I} geschat worden. De initiële status van het rendementgenererende proces $\bar{p} = \{\bar{p}_i\}$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$(83) \quad \bar{p}_i = P(q_1 = s_i | q, u)$$

Deze kans kan als volgt geschat worden:

$$(84) \quad P(q_1 = s_i | q, u) = \frac{\sum_{t=1}^T y_i(t)}{T}$$

Hierbij geldt:

$$(85) \quad y_i(t) = 1 \text{ indien } q_t = s_i \text{ anders } y_i(t) = 0$$

De statusveranderingen van het rendementgenererende proces $\bar{a} = \{\bar{a}_{ij}\}$ worden als volgt gedefinieerd:

$$(86) \quad \bar{a}_{ij} = P(q_{t+1} = s_j | q_t = s_i, q, u)$$

Deze kans kan als volgt geschat worden:

$$(87) \quad P(q_{t+1} = s_j \mid q_t = s_i, q, u) = \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^T \mathbf{y}_i(t)}$$

Hierbij geldt:

$$(88) \quad \mathbf{x}_{ij}(t) = 1 \text{ indien } q_t = s_i, q_{t+1} = s_j \text{ anders } \mathbf{x}_{ij}(t) = 0$$

De kansverdeling $\bar{b} = \{\bar{b}_i(u_t)\}$ van het rendementgenererende proces wordt als volgt gedefinieerd:

$$(89) \quad \bar{b}_i(u_t) = P(\bar{u}_t = u_t \mid q_t = s_i, q, u)$$

waarbij de parameters van status s_i als volgt geschat kunnen worden:

$$(90) \quad \bar{\mathbf{m}}_i = \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{y}_i(t) \cdot u_t}{\sum_{t=1}^T \mathbf{y}_i(t)}$$

en

$$(91) \quad \bar{\mathbf{s}}_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{y}_i(t) \cdot (u_t - \bar{\mathbf{m}})^2}{\sum_{t=1}^T \mathbf{y}_i(t)}$$

Tenslotte wordt bepaald welk van deze modellen het meest waarschijnlijk is. Dit is het model \bar{I} dat de kans $P(u \mid \bar{I})$ maximaliseert. Deze kans kan met de forward variabele uit onderdeel 6.2 geschat worden:

$$(92) \quad P(u \mid I) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_T(i)$$

De gehele n-GRID methode kan als volgt recursief geformuleerd worden:

Invoer:

Een reeks observaties $u = \{u_1, u_2, \dots, u_T\}$ en het maximaal aantal verschillende statussen n waarin het rendementgenererende proces kan verkeren.

Aanroep:

$J(1)$

Recursie $J(t)$:

indien $t \leq T$ dan:

voor $1 \leq i \leq n$:

$$q_t = s_i$$

$$J(t+1)$$

anders:

voor $1 \leq i \leq n$:

bereken \bar{p}_i volgens vergelijking (84)

voor $1 \leq j \leq n$: bereken \bar{a}_{ij} volgens vergelijking (87)

bereken \bar{m}_i volgens vergelijking (90)

bereken \bar{s}_i^2 volgens vergelijking (91)

bereken $P(u | \bar{I})$ volgens vergelijking (92)

indien $P(u | \bar{I}) > P(u | I)$ dan: $I = \bar{I}$

Uitvoer:

Model \bar{I} , dat de kans $P(u | \bar{I})$ maximaliseert.

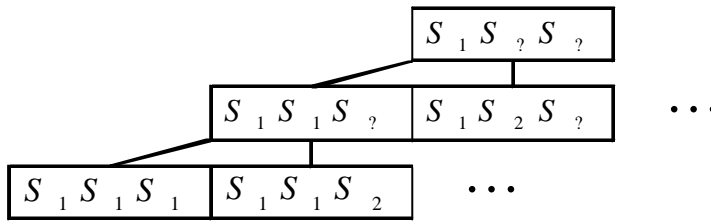
7.2 Optimalisatie en uitbreidingen

Zoals in voorgaand onderdeel is geformuleerd, schat de n-GRID methode het model van T^T statussequenties, waarbij T het aantal observaties is. Een groot aantal van de gegenereerde statussequenties is echter equivalent. Bijvoorbeeld; de statussequenties s_1, s_1, s_2 en s_1, s_1, s_3 onderscheiden beide dezelfde twee statussen alleen wordt aan deze statussen een ander indexnummer toegekend. Om dubbeltelling te voorkomen, wordt de volgende voorwaarde gedefinieerd:

$$(93) \quad q_{t+1} \leq \max(q_1, q_2, \dots, q_t) + 1$$

Deze voorwaarde ziet erop toe dat op een systematische manier nummers aan de verschillende statussen worden toegekend.

In figuur 8 is in een boomdiagram weergegeven hoe alle statussequenties van alle mogelijke statussen over een drietal tijdstippen systematisch bepaald kunnen worden indien deze voorwaarde in acht wordt genomen.



figuur 8: boomdiagram mogelijke statussequenties

In tabel 6 zijn alle statussequenties, die volgen uit dit boomdiagram, weergegeven. Dit aantal is aanzienlijk minder dan het aantal dat weergegeven is in tabel 5. Hierdoor hoeven veel minder modellen in beschouwing te worden genomen, hetgeen de rekentijd aanzienlijk versnelt.

$S_1 S_1 S_1$	$S_1 S_1 S_2$	
$S_1 S_2 S_1$	$S_1 S_2 S_2$	$S_1 S_2 S_3$

tabel 6: boomdiagram mogelijke statussequenties

De geoptimaliseerde n-GRID methode kan als volgt recursief geformuleerd worden:

Aanroep:

$$J_1(1,1)$$

Recursie $J(t,n)$:

indien $t \leq T$ dan:

voor $1 \leq i \leq n+1$:

$$q_t = s_i$$

$$J[t+1, \max(i, n)]$$

anders:

voor $1 \leq i \leq n$:

bereken \bar{p}_i volgens vergelijking (84)

voor $1 \leq j \leq n$: bereken \bar{a}_{ij} volgens vergelijking (87)

bereken \bar{m}_i volgens vergelijking (90)

bereken \bar{s}_i^2 volgens vergelijking (91)

bereken $P(u | \bar{I})$ volgens vergelijking (92)

indien $P(u | \bar{I}) > P(u | I)$ dan: $I = \bar{I}$

De n-GRID methode schat nu het model van e^T statussequenties. De complexiteit van het algoritme bedraagt nu in termen van big-Oh notatie: $O(n) = e^n$. Deze optimalisatie vermindert de rekentijd dus aanzienlijk.

Verder valt nog winst te boeken op de rekentijd door bepaalde berekeningen op een intelligentere manier uit te voeren. In plaats van berekeningen op de bodem van de recursie uit te voeren worden nu verschillende tussenresultaten opgeslagen. Om alle modelparameters te berekenen worden de volgende variabelen gedeclareerd:

$count_q_i$ om het aantal observaties te tellen dat in status i verkeert, $count_a_{ij}$ om het aantal transities van status s_i naar s_j te tellen, sum_q_i om de waarde van de observaties die in status s_i verkeren te sommeren en $sqsum_q_i$ om de gekwadrateerde waarde van de observaties die in status s_i verkeren te sommeren.

De geoptimaliseerde n-GRID methode kan als volgt recursief geformuleerd worden:

Aanroep:

$J(1,1)$

Recursie $J(t,n)$:

indien $t \leq T$ dan:

voor $1 \leq i \leq n+1$:

$q_i = s_i$

$count_q_i ++$

$count_a_{q_i,i} ++$

$sum_q_i += u_i$

$sqsum_q_i += u_i^2$

$J[t+1, \max(i, n)]$

anders:

voor $1 \leq i \leq n$:

bereken \bar{p}_i volgens vergelijking (84) mbv tussenresultaten

voor $1 \leq j \leq n$:

bereken \bar{a}_{ij} volgens vergelijking (87) mbv tussenresultaten

bereken \bar{m}_i volgens vergelijking (90) mbv tussenresultaten

bereken \bar{s}_i^2 volgens vergelijking (91) mbv tussenresultaten

bereken $P(u | \bar{I})$ volgens vergelijking (92)

indien $P(u | \bar{I}) > P(u | I)$ dan: $I = \bar{I}$

Door deze tussenresultaten op te slaan, wordt de rekentijd van de n-GRID methode wederom aanzienlijk vermindert. Verder is het nog mogelijk om de n-GRID methode te versnellen door verschillende *heuristieken* [7] toe te passen. Hier zal echter niet verder op worden ingegaan.

8. Vergelijking modellen en rekenmethoden

In dit onderdeel zal een vergelijking gemaakt worden tussen de prestaties van de ARCH modellen en de n-GRID methode. Het doel is om te evalueren in hoeverre de n-GRID methode kort na een trendbreuk een betere schatting kan maken van volatiliteit dan een ARCH model.

Het volgende experiment wordt nu uitgevoerd: gedurende een korte tijdsperiode wordt het verloop van een aandeel gesimuleerd op basis van vergelijking (20). Halverwege deze tijdsperiode wordt een trendbreuk gesimuleerd. Op ieder tijdstip wordt vervolgens met behulp van beide methoden een schatting gemaakt van de volatiliteit. Tenslotte wordt bepaald in hoeverre de geschatte modellen de tijdreeks kunnen verklaren. In tabel 7 is dit experiment weergegeven.

t	simulated					
	variance	return	EWMA	likelhood	n-GRID	likelhood
1	0,10	4,87%	0,002371	5,04	0,006535	4,67
2	0,10	2,30%	0,002371	5,82	0,006535	4,95
3	0,10	-13,76%	0,001718	-4,65	0,006535	2,14
4	0,10	0,58%	0,007815	4,85	0,006535	5,03
5	0,10	-4,15%	0,005057	4,95	0,006535	4,77
6	0,10	11,04%	0,003875	2,41	0,006535	3,17
7	0,10	-9,17%	0,006822	3,75	0,006535	3,74
8	0,10	-4,04%	0,007384	4,69	0,006535	4,78
9	0,10	0,70%	0,005344	5,22	0,006535	5,02
10	0,10	11,39%	0,003468	1,92	0,006535	3,05
11	0,20	-18,10%	0,006835	0,19	0,096599	2,00
12	0,20	-4,19%	0,016025	4,02	0,096599	2,32
13	0,20	-68,56%	0,010969	-38,33	0,096599	-2,53
14	0,20	44,53%	0,173647	0,61	0,096599	0,28
15	0,20	-6,05%	0,182380	1,68	0,096599	2,30
16	0,20	17,11%	0,119040	1,88	0,096599	2,03
17	0,20	-0,92%	0,087224	2,44	0,096599	2,34
18	0,20	21,12%	0,056341	2,08	0,096599	1,88
19	0,20	20,24%	0,052184	2,17	0,096599	1,91
20	0,20	23,74%	0,048205	1,86	0,096599	1,75
				12,62		55,59

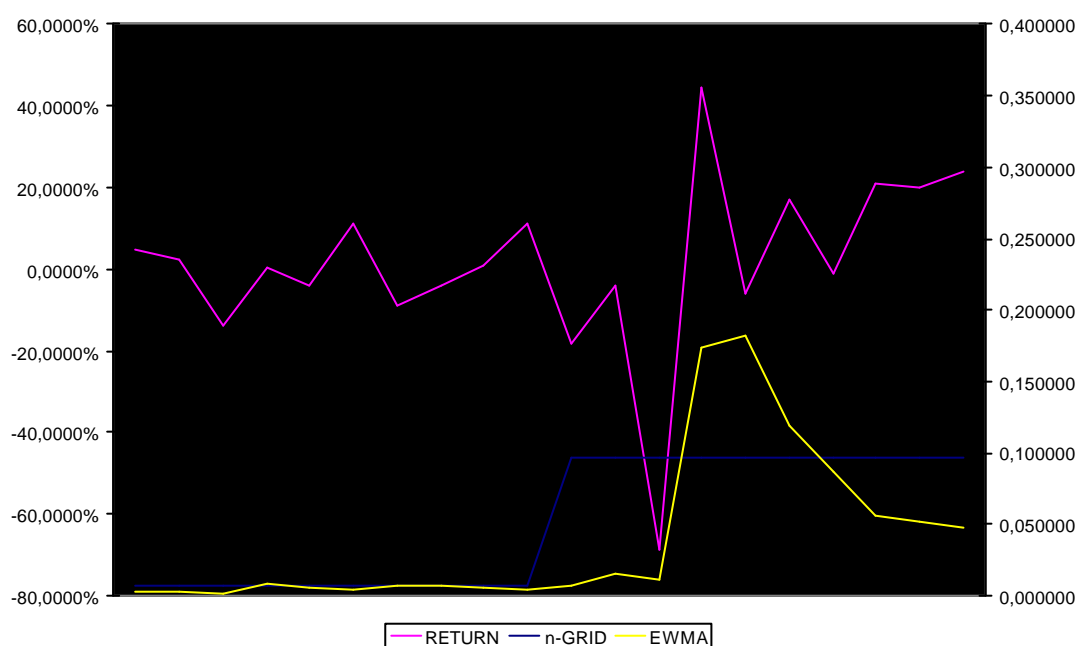
tabel 7: vergelijking likelhood EWMA en n-GRID

Omdat GARCH(1,1) niet stabiel is over deze tijdsperiode wordt gebruik gemaakt van het EWMA model. Per tijdstip komt de variantie s_t^2 volgens vergelijking (47) tot stand. Het optimum wordt geschat met behulp van de maximum likelhood methode. In dit optimum geldt dan: $I = 0,645589$. De maximum likelhood waarde in dit optimum bedraagt 12,62.

Vervolgens wordt de n-GRID methode toegepast op deze tijdreeks. De variantie s^2 wordt door deze methode op 0,006535 geschat van tijdstip 1 tot en met 10 en op 0,096599 van tijdstip 11 tot en met 20. De likelihood waarde van dit model bedraagt 55,59. Het n-GRID model geeft in termen van waarschijnlijkheid dus een betere verklaring voor de tijdreeks.

Het EWMA model is niet goed in staat de trendbreuk te detecteren. Dit blijkt uit de lage likelihood-waarde van de schatting van de volatiliteit gedurende een korte periode na de gesimuleerde trendbreuk.

In figuur 9 zijn de gesimuleerde rendementen en het verloop van de door beide modellen geschatte volatiliteit weergegeven.



figuur 9: gesimuleerde rendementen met volatiliteit (EWMA/n-GRID)

Uit deze figuur valt duidelijk het beperkte adaptievermogen van het EWMA model waar te nemen: gedurende het eerste deel van de tijdreeks is de volatiliteit relatief laag. Halverwege de tijdreeks vindt een harde trendbreuk plaats. Gedurende een korte periode na de trendbreuk, wordt het merendeel van de gewichten toegekend aan observaties uit een verdeling met een lage volatiliteit. Hierdoor is de schatting van de volatiliteit gedurende deze tijdsperiode te laag en kan het model geen goede verklaring geven voor de tijdreeks in termen van waarschijnlijkheid.

9. Conclusies en aanbevelingen

Gebleden is dat een goede schatting van risico onontbeerlijk is voor de analyse en het beheer van financieel risico van aandelen. Hiertoe zijn in de loop der tijd verschillende modellen en rekenmethoden ontwikkeld. Een vandaag de dag zeer populaire klasse van modellen, de ARCH modellen, blijkt in sommige situaties geen goede schatting te kunnen maken van dit risico. Omdat de ARCH modellen het verloop van het risico van aandelen over de tijd beschrijven door middel van een autoregressieve vergelijking, wordt het adaptievermogen van deze modellen beperkt: de schatting van volatiliteit op een willekeurig tijdstip neigt naar de trend uit het verleden. Indien sprake is van een harde trendbreuk, is de schatting van volatiliteit gedurende een korte periode na deze breuk onzuiver.

Doel van dit onderzoek was te evalueren in hoeverre het gebruik van verborgen Markov modellen gebruikt kunnen worden om een beschrijving te geven van risico ten tijde van een dergelijke trendbreuk. Reeds bestaande rekenmethoden voor deze modellen vereisen echter vrij nauwkeurige a-priori kennis. Omdat omtrent deze a-priori kennis geen zinvolle aannames kunnen worden gedaan voor financiële tijdreeksen, is specifiek voor dit onderzoek een nieuwe rekenmethode ontwikkeld, waarmee de parameters van het model geschat kunnen worden: de n-GRID methode. De prestatie van deze rekenmethode is vervolgens geëvalueerd ten tijde van een trendbreuk. Hiertoe is het koersverloop van een aandeel gesimuleerd gedurende een korte tijdsperiode. Halverwege werd een trendbreuk gesimuleerd. Vervolgens is vastgesteld dat een verborgen Markov model met behulp van de n-GRID methode in termen van waarschijnlijkheid een betere beschrijving kan geven van het verloop van het risico van een aandeel ten tijde van een trendbreuk dan een traditioneel model zoals het EWMA model. Daarbij dient gezegd te worden dat de n-GRID methode veel complexer is dan de ARCH modellen en veel meer rekentijd vereist.

Verder zou het interessant zijn om te onderzoeken in hoeverre verborgen Markov modellen een verklaring zouden kunnen geven voor de reële prijzen van financiële contracten. Door reële prijzen te beschrijven op een willekeurig moment wordt de evaluatie niet langer beperkt tot een periode na een trendbreuk. Hiertoe zou de *future volatility* [5], de door de modellen voorspelde waarde van de volatiliteit, van beide modellen op een willekeurig moment vergeleken kunnen worden met de *implied volatility* [5]. De mate waarin de future volatility van een model neigt naar de implied volatility, zou een maatstaf kunnen zijn voor de kwaliteit van het betreffende model. Op deze manier wordt tegelijkertijd indirect onderzocht in hoeverre mogelijke trendbreuken verwerkt zijn in reële prijzen van financiële contracten. Dergelijk vervolgonderzoek beveel ik van harte aan.

10. Literatuurlijst

- [1] Brealey & Myers, “Principles of Corporate Finance”, 6th Edition, McGrawHill
- [2] Feller, “An Introduction to Probability Theory and its Applications”, 3rd Edition, Wiley International
- [3] de la Grandville, “Bond Pricing and Portfolio Analysis”, MIT press
- [4] Hogg & Craig, “Introduction to Mathematical Statistics”, 3rd Edition, Macmillan
- [5] Hull, “Options, Futures & Other Derivatives”, 4th Edition, Prentice Hall
- [6] Rabiner, “A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition”, IEEE volume 77
- [7] Weiss, “Datastructures & Problem Solving”, Addison Wesley